تبدیل Z:

تبدیل Z ابزاری است که مشکل فوریه گسسته را حل میکند که آن مشکل در مورد سیگنال های ناپایدار است.

$$x(n) \longleftrightarrow X(Z) \quad , \quad \text{ROC}$$

$$x(n) \longleftrightarrow X(\Omega) \text{ یا } X(e^{j\Omega}) \qquad \text{پیوسته ی متناوب}$$

$$\left.\begin{aligned} X(Z) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).Z^{-n} \\ X(e^{j\Omega}) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n).e^{-j\Omega n} \end{aligned}\right\} \quad Z \longrightarrow e^{j\Omega}$$

نکته: اگر جای Z در X(Z) ، $e^{j\Omega}$ قرار دهیم $X(e^{j\Omega})$ یعنی تبدیل فوریه گسسته به دست می آید اما به یک شرط : X(Z) باید پایدار باشد.

عکس نکته بالا: اگر جای $e^{j\Omega}$ ، Z قرار دهیم ، X(Z) یعنی تبدیل Z به دست می آید و باید ROC نیز محاسبه شود.« در اینجا دیگر شرطی نداریم»

عکس تبدیل Z: برای عکس تبدیل Z از بسط به کسر های جرئی استفاده می کنیم.البته با دقت به ROC ها

تبدیل Z برخی سیگنال های مهم:

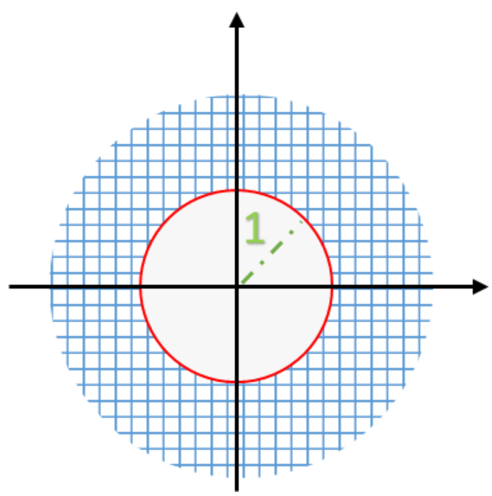
1. $X(n) = \delta(n) \longleftrightarrow X(Z) = 1$ **ROC: کل صفحه Z**

2. $X(n) = u(n) \longleftrightarrow X(Z) = \dfrac{1}{1-Z^{-1}}$ **ROC: $|Z| > 1$**

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} 1 . Z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (Z^{-1})^{n} = \frac{1}{1-Z^{-1}}$$

ROC: $|Z^{-1}| < 1 \longleftrightarrow |Z| > 1$

محدوده ROC سیگنال فوق $\longrightarrow$



نکته:

محیط دایره ای به شعاع r و مرکز Z. $\longleftrightarrow$ $|Z - Z.| = r$

بیرون دایره ای به شعاع r و مرکز Z. $\longleftrightarrow$ $|Z - Z.| > r$

داخل دایره ای به شعاع r و مرکز Z. $\longleftrightarrow$ $|Z - Z.| < r$

3. X(n) = $(\frac{1}{2})^n u(n) \longleftrightarrow$ X(Z) = $\frac{1}{1-\frac{1}{2}Z^{-1}}$ ROC: $|Z|>\frac{1}{2}$

$$X(Z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2})^n . Z^{-n} = \sum_{n=0}^{+\infty} (\frac{1}{2} Z^{-1})^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}Z^{-1}}$$

ROC: $|\frac{1}{2}Z^{-1}| < 1 \longleftrightarrow |Z| > \frac{1}{2}$

قانون: اگر ســـیگنال چپگرد (درون ســو) باشــد ROC آن داخل دایره و اگر ســـیگنال راستگرد (برون سو) باشد ROC آن خارج دایره است.

4. X(n) = $2^n u(-n) \longleftrightarrow$ X(Z) = $\frac{1}{1-\frac{1}{2}Z}$ ROC: $|Z|<2$

$$X(Z) = \sum_{n=-\infty}^{0} (2)^n . Z^{-n} = \sum_{n=-\infty}^{0} (\frac{1}{2} Z)^n = \frac{1}{1-\frac{1}{2}Z}$$

ROC: $|\frac{1}{2}Z| < 1 \longleftrightarrow |Z| < 2$

5. X(n) = $-2^n u(-n-1)$ $\longleftrightarrow$ X(Z) = $\frac{1}{1-2Z^{-1}}$ ROC: $|Z|<2$
$= -2^n u(-n) + \delta(n)$

$$X(Z) = \frac{-1}{1-\frac{1}{2}Z} + 1 = \frac{\frac{-1}{2}Z}{1-\frac{1}{2}Z} \xrightarrow[\text{ضربدر } 2Z^{-1}]{\text{صورت و مخرج}} X(Z) = \frac{1}{1-2Z^{-1}}$$

نکته: قطب به ما نشان می دهد که شعاع دایره چقدر است و بالعکس.

6. $X(n) = 2^n u(n) \longleftrightarrow X(Z) = \dfrac{1}{1-2Z^{-1}}$ ROC: $|Z| > 2$

7. $X(n) = A\, rect(\frac{n}{2a}) \longleftrightarrow X(Z) = A.\dfrac{Z^{+a}-Z^{-(a+1)}}{1-Z^{-1}}$ ROC: Z کل صفحه

$$X(Z) = A.\sum_{n=-a}^{+a} Z^{-n} = A.\frac{Z^{+a}-Z^{-(a+1)}}{1-Z^{-1}}$$

a عددی صحیح

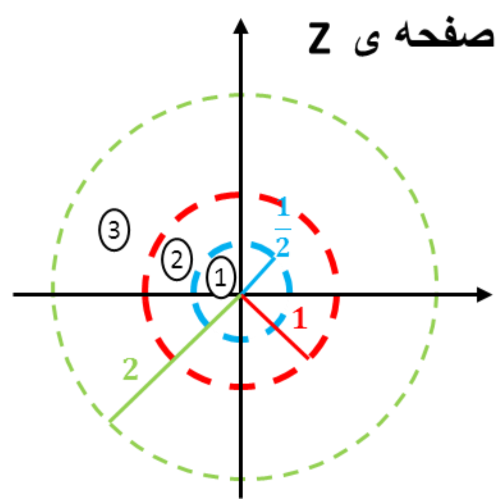
نکته: اگر ROC دایره ای به شعاع یک را شامل شود می گوییم سیگنال پایدار است.

عکس تبدیل Z:

$$X(Z) = \frac{3Z^{-1}-1}{(1-2Z^{-1})(1+\frac{1}{2}Z^{-1})} = \frac{A}{(1-2Z^{-1})} + \frac{B}{(1+\frac{1}{2}Z^{-1})}$$

$(1-2Z^{-1}) = 0 \longrightarrow Z=2$

$(1+\frac{1}{2}Z^{-1}) = 0 \longrightarrow Z=-\frac{1}{2}$



$|Z|<\frac{1}{2} \rightarrow 1 \rightarrow X(n) = -A\,2^n\,u(-n-1) - B\,(-\frac{1}{2})^n\,u(-n-1)$

در ناحیه ی 1 هردو درون سواند

$\frac{1}{2}<|Z|<2 \rightarrow 2 \rightarrow X(n) = -A\,2^n\,u(-n-1) + B\,(-\frac{1}{2})^n\,u(-n)$

$|Z|>2 \rightarrow 3 \rightarrow X(n) = A\,2^n\,u(n) + B\,(-\frac{1}{2})^n\,u(-n)$

$h(n)$

پاسخ ضربه سیستم LTI

- علّی $\rightarrow h(n)=0\ \ n<0\ \ \text{or}\ \ n\le -1 \rightarrow$ اشتراک ROC ها برون سو: H(Z)
- حافظه دار $\rightarrow h(n)\neq k\delta(n) \rightarrow H(Z)\neq k$
- پایدار $\rightarrow \sum_{-\infty}^{+\infty}|h(n)| < M \rightarrow$ باید دایره واحد Hz ROC را شامل شود
- وارون پذیر $\rightarrow h(n)*h(n)^{inv}=\delta(n) \rightarrow H(Z).H(Z)^{inv}=1$

$\Rightarrow H(Z)^{inv} = \frac{1}{H(Z)}$

به دو شرط: $h(n)$ و $h(n)^{inv}$ اشتراک ROC داشته باشند و حذف صفر و قطب ناپایدار نداشته باشیم.

خواص تبدیل Z:

۱.خطی بودن:

$$X(n) \longrightarrow X(Z);\ ROCx$$

$$h(n) \longrightarrow H(Z);\ ROCh$$

همگنی $\longrightarrow A\,X(n) \longrightarrow A\,X(Z)\ ;\ ROCx$

چون A از زیگما بیرون می آید تاثیری در همگرایی یا واگرایی ندارد

جمع پذیری $\longrightarrow X(n) + h(n) \longrightarrow X(Z) + H(Z) \quad ROC = ROCx \cap ROCh$

خطی $\longrightarrow A\,X(n) + B\,h(n) \longrightarrow A\,X(Z) + B\,H(Z) \quad ROC = ROCx \cap ROCh$

۲.شیفت در حوزه زمان:

$$X(n) \longrightarrow X(Z);\ ROCx$$

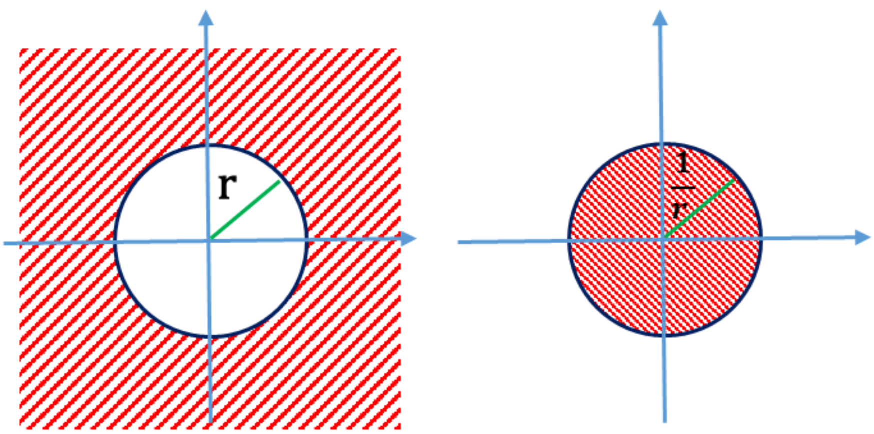
$X(n\text{-}n.) \longrightarrow Z^{-n.}X(Z)\ ;\ ROCx -$ { ریشه های ساده شده ی $Z=0$ }

$Z^{-n.}$ از زیگما بیرون می آید و تاثیری در همگرایی یا واگرایی ندارد
اما ممکن است برخی جملات حذف شوند بنابراین یک شرط در نظر گرفته ایم

۳. وارونگی زمانی:

$$X(n) \longrightarrow X(Z);\ ROCx$$

$$X(-n) \longrightarrow\ ?=X(\tfrac{1}{Z});\ ROC$$



ROCX(n) ROCX(-n)

نه تنها برون سو رو درون سو ، درون سو رو برون سو کرد بلکه شعاع رو هم تغییر داد

۴. تغییر مقیاس در حوزه زمان:

Scaling در گسسته میتواند باعث حذف یک سری از داده ها شود در نتیجه سیگنال جدید میتواند کاملا سیگنال متفاوتی باشد که هیچگونه ارتباطی با ROC_X ندارد. یک سیگنال فرد در نظر بگیرید که $X(n)=\{\ldots,-1,0,1,3,\ldots\}$ اکنون $X(2n)$ می شود صفر در نتیجه $X(z)$ سیگنال هم صفر میشود.

۵. شیفت در حوزه ی Z:

$$X(n) \longrightarrow X(Z); ROCx$$

$$? \longleftarrow X(Z\text{-}Z_.); ?$$

$$X(n) \longrightarrow X(Z)=\sum_{-\infty}^{\infty} X(n).Z^{-n}$$

$$Y(Z)=\sum_{-\infty}^{\infty} Y(n).Z^{-n}$$

$$Y(Z\text{-}Z_.)=\sum_{-\infty}^{\infty} Y(n).(Z-Z_.)^{-n}$$

$$=\sum_{-\infty}^{\infty} \underbrace{(n,Z)}Z^{-n}$$

هیچ رابطه ای با X(n) ندارد. ⇐ نتوانستیم هیچ رابطه ای پیدا کنیم.

۶. تقسیم در حوزه Z:

$$X(n) \longrightarrow X(Z); ROCx$$

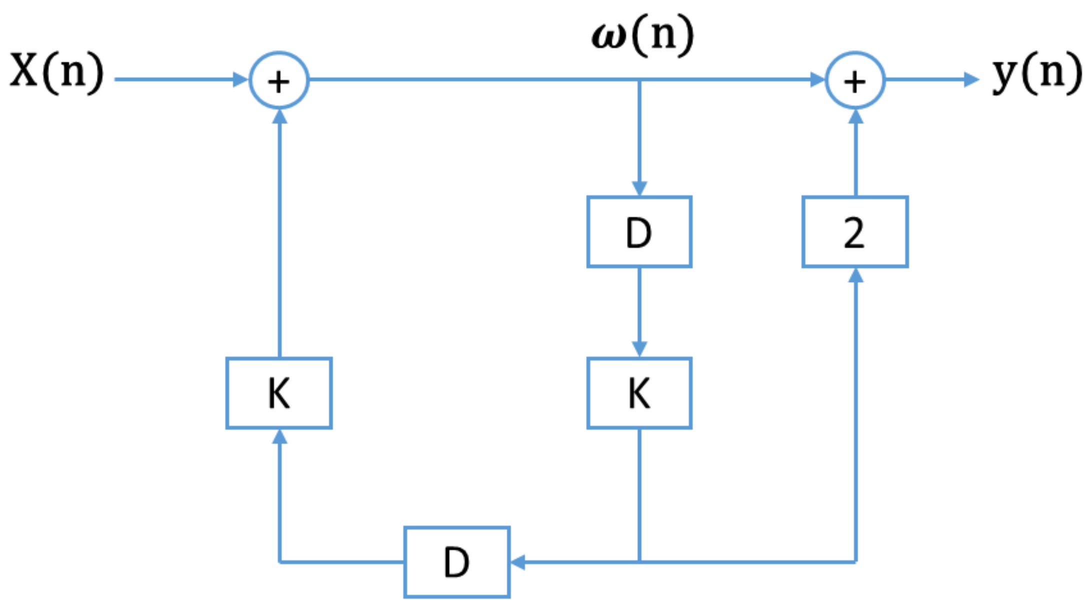
$$Z_.^{\,n}X(n) \longleftarrow X\left(\frac{Z}{Z_.}\right)$$ ROC میتواند تغییر کند

$$\frac{-1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{3}{2} \quad \ldots \neq$$ صحیح ⇐ صفر

۷. کانولوشن در حوزه زمان:

کانولوشن در حوزه زمان معادل ضرب در حوزه ی Z است و ROC ها هم اشتراک ROC ها میشود.

سوال مهم امتحانی: با توجه به بلوک دیاگرام داده شده به سوالات زیر پا سخ دهید « سیستم LTI است»



الف) محدوده k را چنان تعیین کنید که سیستم حلقه بسته علّی و پایدار باشد.

1 قطب ها بایستی داخل دایره ی واحد باشد

$$\omega(n)=X(n)+k^2\omega(n-2) \rightarrow \omega(Z)\,[1-k^2Z^{-2}] = X(Z)$$

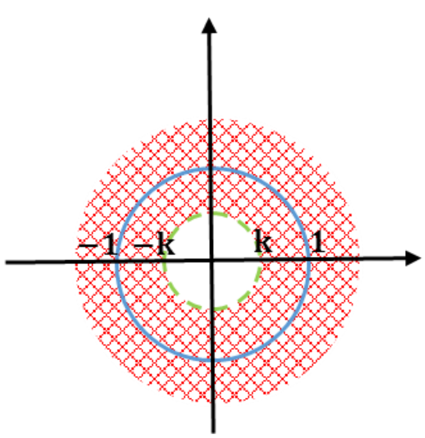
$$\omega(Z) = \frac{X(Z)}{[1-k^2Z^{-2}]}$$

$$y(n)= \omega(n)+2k\omega(n-1) \rightarrow Y(Z) =\omega(Z)\,[1+2kZ^{-1}]$$

$$H(Z) = \frac{Y(Z)}{X(Z)} = \frac{[1+2kZ^{-1}]}{[1-k^2Z^{-2}]}$$

یافتن قطب ها: $1-k^2Z^{-2}=0 \rightarrow 1=k^2Z^{-2} \rightarrow \frac{k^2}{Z^2} = 1 \rightarrow k^2=Z^2 \rightarrow |k|=|Z|$

چطوری برون سو بودنشو تضمین می کنیم؟ ← $|K|<1$ ← داخل دایره ی به شعاع یک



چون پایدار است
باید شامل دایره واحد باشد

ب) پاسخ پله و پاسخ ضربه به ازای K=1/2 را بیابید.

$$H(Z) = \frac{[1+z^{-1}]}{[1-\frac{1}{4}z^{-2}]} = \frac{[1+z^{-1}]}{[1+\frac{1}{2}z^{-1}][1-\frac{1}{2}z^{-1}]}$$

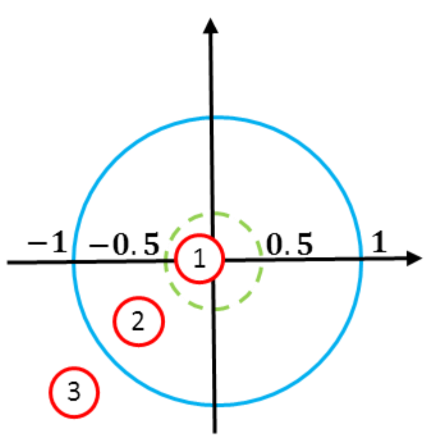
$$h(n) = A\,(-\frac{1}{2})^n\, u(n) - B\,(\frac{1}{2})^n\, u(n)$$

فقط اجازه داریم پاسخ برون سو رو بنویسیم چون در صورت الف گفته بود پایدار و علّی باشد و برای علّی بودن باید برون سو باشد و $k=1/2$ هم که در شرط $|k|<1$ صدق میکند

پاسخ به ازای ورودی پله:

$$X(Z) = \frac{1}{1-Z^{-1}}$$

$$Y(Z) = \frac{1+z^{-1}}{(1+\frac{1}{2}z^{-1})(1-\frac{1}{2}z^{-1})(1-z^{-1})}$$



از بین 3 ناحیه فقط مجازیم یکی را انتخاب کنیم.
از آنجا که ROC پله برون سو وبزرگ تر از 1 است در می یابیم اشتراک ROC ورودی با ROC $k=1/2$ بیرون دایره ای به شعاع 1 میشود یعنی ناحیه 3

 # اگر بخواهد حافظه دار باشد باید $k=0$ نباشد.