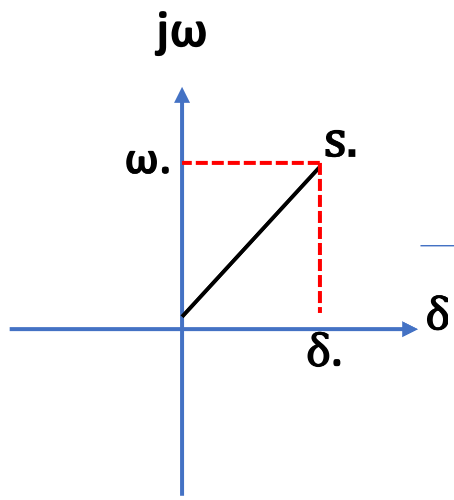
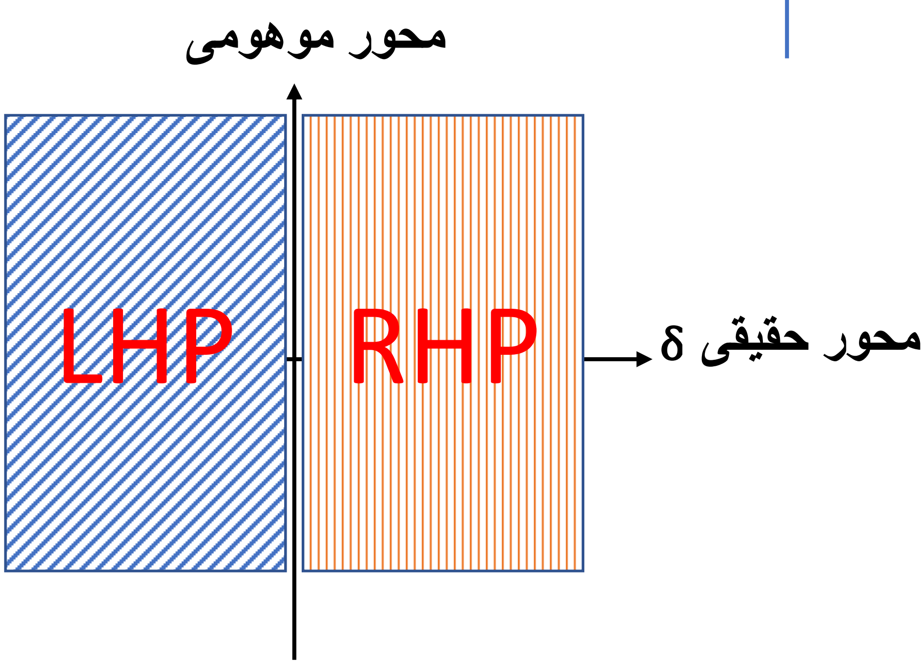
$f(t) \longleftrightarrow F(s)$

زمان ← $f(t)$ ، لاپلاس ← $F(s)$



صفحه S



$$s = \delta + j\omega$$

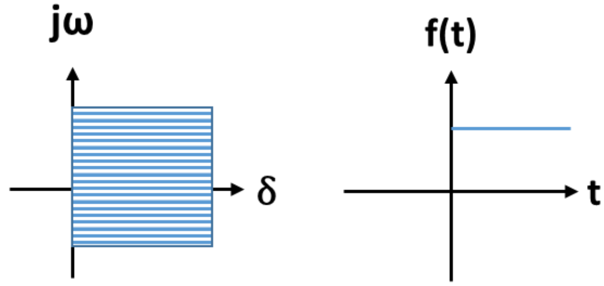
$$F(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt \longrightarrow \text{لاپلاس دوطرفه}$$

$$F(s) = \int_{0}^{+\infty} f(t)e^{-st}\,dt \longrightarrow \text{لاپلاس یک طرفه}$$

تبدیل لاپلاس برخی سیگنال های مهم:

1. $f(t)=\delta(t) \longleftrightarrow F(s)=1$ کل صفحه S

2. $f(t)=u(t) \longleftrightarrow F(s)=\frac{1}{s}$ Re |s|>0



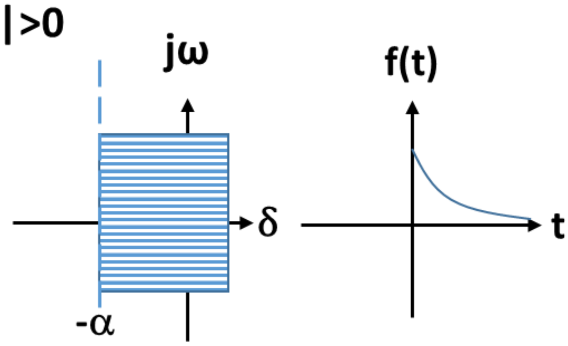
$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} u(t)e^{-st}\,dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-st}\,dt=-\frac{1}{s}e^{-st}\Big|_{0}^{+\infty}=0+\frac{1}{s}=\frac{1}{s}$$

$$e^{-st}\Big|_{0}^{+\infty}=e^{-(\delta+j\omega)t}\Big|_{0}^{+\infty}=e^{-\delta t}.e^{-j\omega t}\Big|_{0}^{+\infty}=0-1=-1$$

نقشی ندارد چون max اندازه اش یک است.

شرط $\longrightarrow \delta>0 \longrightarrow$ Re |s|>0

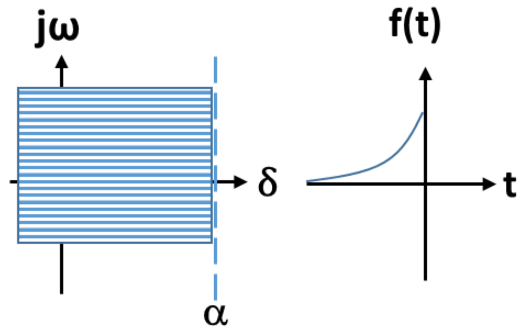
3. $f(t)=e^{-\alpha t}.u(t) \longleftrightarrow F(s)=\frac{1}{s+\alpha}$ Re |s|>-α



$$F(s)=\int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}.e^{-st}\,dt=\int_{0}^{+\infty} e^{-(s+\alpha)t}\,dt=-\frac{1}{s+\alpha}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{s+\alpha}$$

شرط $\longrightarrow \delta+\alpha>0 \longrightarrow \delta>-\alpha \longrightarrow$ Re |s|>-α

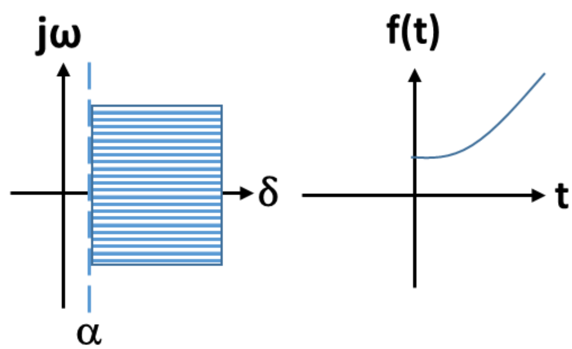
4. $f(t)=e^{\alpha t}.u(-t) \longleftrightarrow F(s)=\dfrac{-1}{s-\alpha}\quad \text{Re}\,|s|<\alpha$



$$F(s)=\int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}.e^{-st}\,dt=\int_{-\infty}^{0} e^{(\alpha-s)t}\,dt=\frac{1}{\alpha-s}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_{-\infty}^{0}=\frac{-1}{s-\alpha}$$

شرط $\longrightarrow \alpha-\delta>0 \longrightarrow \delta<\alpha \longrightarrow \text{Re}\,|s|<\alpha$

5. $f(t)=e^{\alpha t}.u(t) \longleftrightarrow F(s)=\dfrac{1}{s-\alpha}\quad \text{Re}\,|s|>\alpha$



$$F(s)=\int_{0}^{+\infty} e^{\alpha t}.e^{-st}\,dt=\int_{0}^{+\infty} e^{(\alpha-s)t}\,dt=\frac{-1}{s-\alpha}e^{-(s-\alpha)t}\Big|_{0}^{+\infty}=\frac{1}{s-\alpha}$$

شرط $\longrightarrow \delta-\alpha>0 \longrightarrow \delta>\alpha \longrightarrow \text{Re}\,|s|>\alpha$

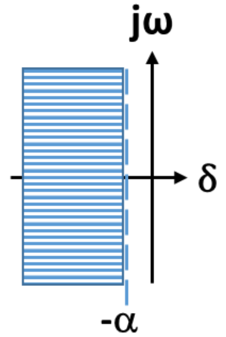
$F(s)=\dfrac{1}{s-\alpha}$

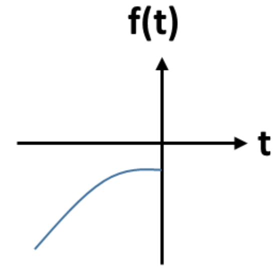
- $\longrightarrow$ **Roc=?** $\quad \text{Re}\,|s|<\alpha \quad f(t)=-e^{\alpha t}.u(-t)$
- $\longrightarrow$ **Roc=?** $\quad \text{Re}\,|s|<\alpha \quad f(t)=e^{\alpha t}.u(t)$

دیدیم که سیگنال ناپایدار هم تبدیل لاپلاس دارد و این حسن تبدیل لاپلاس است.

نکته: ROC سیگنال های ناپایدار محور jω را شامل نمی شود.

6. $f(t)=e^{-\alpha t}.u(-t) \longleftrightarrow F(s)=\frac{1}{s+\alpha}$ Re|s|<-α

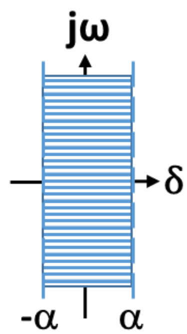


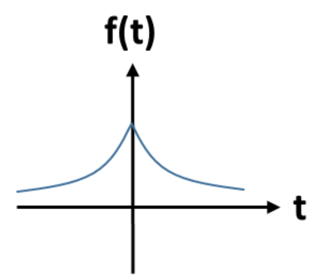


$$F(s)=\int_{-\infty}^{0} -e^{-\alpha t}.e^{-st}\,dt = -\int_{-\infty}^{0} e^{-(\alpha+s)t}\,dt = \frac{1}{s+\alpha}e^{-(s+\alpha)t}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{1}{s+\alpha}$$

شرط $\longrightarrow \alpha+\delta>0 \longrightarrow \delta<-\alpha \longrightarrow$ Re|s|<-α

7. $f(t)=e^{-\alpha|t|} \longleftrightarrow F(s)=\frac{-2\alpha}{s^2-\alpha^2}$ -α<Re|s|<α





$$F(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\alpha|t|}.e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{0} e^{\alpha t}e^{-st}\,dt + \int_{0}^{+\infty} e^{-\alpha t}e^{-st}\,dt = \frac{-1}{s-\alpha}+\frac{1}{s+\alpha}$$
$$=\frac{-2\alpha}{s^2-\alpha^2}$$

$\cancel{F(s)=\frac{4}{s^2-4} \longleftrightarrow f(t)=e^{2|t|}}$

نکته: α همیشه باید مثبت باشد.

8. $f(t)=e^{-\alpha t}u(t) - e^{\alpha t}u(-t) \longleftrightarrow F(s)=\frac{2s}{s^2-\alpha^2} \quad -\alpha<Re\{s\}<\alpha$

9. $f(t)=A\,rect(\frac{t}{2a}) \longleftrightarrow F(s)=\frac{2A}{s}\sinh(as)$ کل صفحه S

$$F(s)=\int_{-a}^{+a} A.e^{-st}\,dt = -\frac{A}{s}e^{-st}\Big|_{-a}^{+a} = \frac{A}{s}(e^{as}-e^{-as}) = \frac{2A}{s}\sinh(as)$$

نکته: اگر سیگنالی در حوزه زمان نسبت به t زوج باشد در حوزه لاپلاس نسبت به S زوج می‌باشد. به روال مشابه می‌توان تبدیل لاپلاس سیگنالهای مهم زیر را نیز محاسبه کرد.

10. $f(t) = A\cos(\omega_0 t)\,u(t)$

11. $f(t) = A\sin(\omega_0 t)\,u(t)$

12. $f(t) = A\,e^{-\alpha t}\cos(\omega_0 t)\,u(t)$

13. $f(t) = A\,e^{-\alpha t}\sin(\omega_0 t)\,u(t)$

خواص تبدیل لاپلاس:

۱.خطی بودن:

$$x(t) \longrightarrow X(s) \longrightarrow ROC_x$$

$$h(t) \longrightarrow H(s) \longrightarrow ROC_h$$

$$A\,x(t)+B\,h(t) \longrightarrow A\,X(s)+B\,H(s) \qquad ROC=ROC_x \cap ROC_h$$

۲.شیفت در حوزه زمان:

$$x(t) \longrightarrow X(s) \longrightarrow ROC_x$$

$$x(t-t_.) \longrightarrow e^{-st_.}.X(s) \longrightarrow ROC_x$$

۳. شیفت در حوزه لاپلاس

$$x(t) \longrightarrow X(s) \longrightarrow ROC_x$$

$e^{s_. t}x(t) \longrightarrow X(s-s_.) \longrightarrow$ ROC تغییر میکند $\longrightarrow$ به اندازه ی $s_.$

$u(t) \longrightarrow \text{Re}\{s\} > 0 \quad X(s) = \frac{1}{s}$

مثال:

$e^{-2t}u(t) \longrightarrow \text{Re}\{s\} > -2 \quad X(s) = \frac{1}{s+2}$

$e^{2t}u(t) \longrightarrow \text{Re}\{s\} > 2 \quad X(s) = \frac{-1}{s-2}$

۴. وارونگی زمانی:

$x(t) \longrightarrow X(s) \longrightarrow ROC_x$

x(-t) ⟶ X(-s) ⟶ ROC تغییر میکند ⟶ نسبت به محور jω قرینه می شود

۵. تغییر مقیاس زمانی یا «scaling»:

$x(t) \longrightarrow X(s) \longrightarrow ROC_x$

$x(at) \longrightarrow \frac{1}{|a|}X(\frac{s}{a}) \longrightarrow$ ROC تغییر میکند

مثال:

$$x(t)=e^{-|t|} \longrightarrow -1<Re\{s\}<1$$

$$x(2t)=e^{-2|t|} \longrightarrow -2<Re\{s\}<2$$

$$x(\tfrac{t}{2})=e^{-\frac{1}{2}|t|} \longrightarrow -\tfrac{1}{2}<Re\{s\}<\tfrac{1}{2}$$

۶. مزدوج در حوزه زمان:

$$x(t) \longrightarrow X(s) \qquad ROC_x$$

$$x^*(t) \longrightarrow ? \qquad ?$$

$X(t)=re^{j\theta}$
$x^*(t)=re^{-j\theta}$

$$X(s)=\int_{-\infty}^{+\infty} re^{j\theta}.e^{-(\delta+j\omega)t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} re^{-\delta t}.e^{j(\theta-\omega t)}\,dt$$

$$\boxed{}=\int_{-\infty}^{+\infty} re^{-j\theta}.e^{-(\delta+j\omega)t}\,dt=\int_{-\infty}^{+\infty} re^{-\delta t}.e^{-j(\theta+\omega t)}\,dt$$

$$\longrightarrow X^*(s^*)$$

e^{jt}:   اندازه $= 1 \quad \theta = t$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1.e^{-\delta t}.e^{j(t-\omega t)}\,dt$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} 1.e^{-\delta t}.e^{j(t+\omega t)}\,dt$$

پس نتیجه میگیریم که ROC تغییری نمیکند چون فقط قسمت حقیقی سیگنال های مختلط تاثیرگذار است.

$X(s)$ **پایدار باشد**	$\equiv$	$X(t)$ **در** $t=\infty$ **کراندار باشد**
$\equiv$		$\equiv$
ROC محورر $j\omega$ **را شامل شود**	$\equiv$	**فوریه داشته باشد**

مربع جادویی

۷. قضیه ی مقدار اولیه و مقدار نهایی حوزه زمان:

$$\lim_{t\to 0} X(t) = \lim_{s\to\infty} s\, X(s)$$

$$\lim_{t\to\infty} X(t) = \lim_{s\to 0} s\, X(s)$$

۸.کانولوشن در زمان:

ورودی دلخواه   تبدیل لاپلاس ورودی

$$\mathbf{x(t)} \longrightarrow \mathbf{X(s)} \qquad \mathbf{ROC_x}$$

$$\mathbf{h(t)} \longrightarrow \mathbf{H(s)} \qquad \mathbf{ROC_h}$$

پاسخ ضربه   تابع تبدیل

لاپلاس خروجی

$$\mathbf{H(s)} = \frac{\mathbf{Y(s)}}{\mathbf{X(s)}}$$

$$\mathbf{Y(s)} = \mathbf{H(s)}.\mathbf{X(s)} \qquad \mathbf{ROC_y = ROC_x \cap ROC_h}$$

$$\mathbf{y(t)} = \mathbf{h(t)} * \mathbf{x(t)} \longrightarrow$$ سیستم LTI

۹. مشتق در حوزه زمان:

$$x^{n}(t) \longrightarrow S^{n}X(s)-S^{n-1}X(0)-S^{n-2}X'(0)-\ldots-SX^{(n-2)}(0)-X^{(n-1)}(0)$$

از طرفین معادله دیفرانسیلی لاپلاس میگیریم تا به تابع تبدیل برسیم حتی اگر شرایط اولیه غیر صفر باشند ما صفر میگیریم.

$h(t)$

- $h(t)=0 \quad t<0 \longrightarrow$ علّی
- $h(t)\neq k\delta(t) \longrightarrow$ حافظه دار
- $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt < M \longrightarrow$ پایدار
- $h(t)*h^{inv}(t)=\delta(t) \longrightarrow$ وارون پذیر

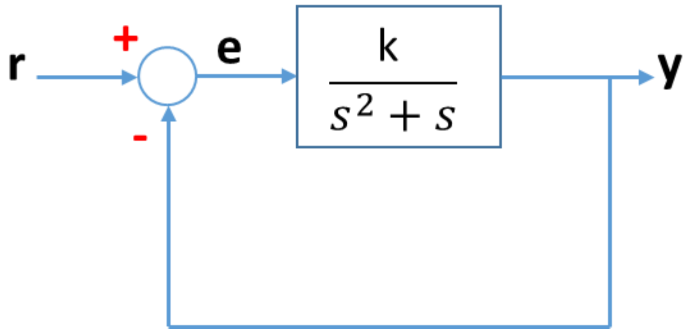
$H(s)$

1. ROC نهایی راستگرد باشد≡ ROCها همگی راستگرد باشند
2. $H(s)\neq k$
3. ROC_h بایدjω را شامل شود
4. $H(s).H^{inv}(s)=1 \longrightarrow H^{inv}(s)=\frac{1}{H(s)}$

در ضرب آخر نباید حذف صفر و قطب صورت بگیرد. در RHP صفرو قطب ناپایدار داریم.

مثال: اگر بلوک دیاگرام یا سیستم LTI به فرم زیر داده شده باشد:

الف) معادله دیفرانسیل حالم بر سیستم مابین خروجی y و ورودی r را محاسبه کنید.



معادله دیفرانسیل سیستم

$$a_n y^{(n)}+a_{n-1}y^{(n-1)}+\cdots+a_1y'+a_0y=b_mx^{(m)}+\dots+b_1x'+b_0x$$

گرفتن تبدیل لاپلاس از طرفین

$$Y(s)(a_ns^n+a_{n-1}s^{n-1}+\cdots+a_1s+a_0)=x(s)(b_ms^m+\dots+b_1s+b_0)$$

تابع تبدیل: $$H(s)=\frac{Y(s)}{X(s)}=\frac{b_ms^m+\dots+b_1s+b_0)}{a_ns^n+\cdots+a_1s+a_0}$$

$$e = r - y \quad , \quad y = \frac{k}{s^2+s} \cdot e = \frac{k}{s^2+s} \cdot (r - y)$$

$$\longrightarrow y\left(1 + \frac{k}{s^2+s}\right) = \left(\frac{k}{s^2+s}\right) r \longrightarrow \frac{y}{r} = \frac{k}{s^2+s+k}$$

$$\longrightarrow (s^2+s+k)\, y(s) = k\, r(s) \longrightarrow y'' + y' + ky = k\, r(s)$$

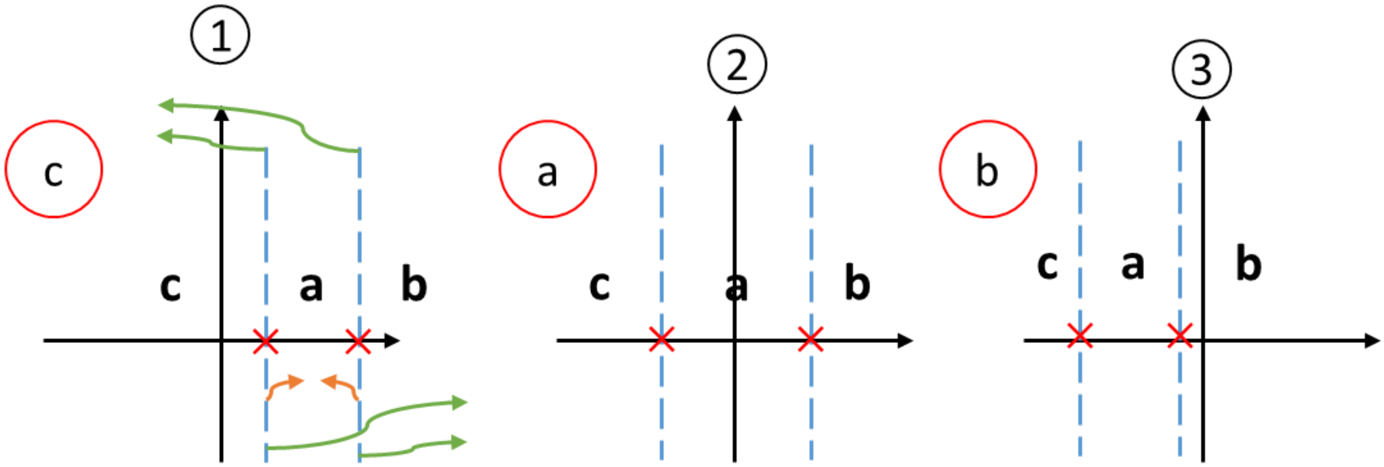
صورت سوال از ما معادله دیفرانسیل را خواسته پس ما باید ابتدا تابع تبدیل را بیابیم و سپس روند backward را طی کنیم.

طبق رابطه: $\dfrac{Y(s)}{R(s)} = \dfrac{\frac{k}{s^2+s}}{1+\frac{k}{s^2+s}} = \dfrac{k}{s^2+s+k}$

اگر کمی دقت کنیم در میابیم که میتوانستیم با استفاده از رابطه ی فیدبکی در قسمت بلوک دیاگرام ها مسیر ساده تری را طی کنیم.

ب) محدوده k را چنان بیابید که سیستم حلقه بسته پایدارباشد.

« به خطی که از y به r برمیگردد فیدبک گوییم و حلقه بسته زمانی اتفاق می افتد که فیدبک داشته باشیم.»



حالت های مختلف قطب ها را بررســـی کردیم و باید توجه کنیم اگر طراح معلوم نکرده باشد خواسته اش کدام یک از شکل های فوق است نمی توانیم محدوده ی k را تعیین کنیم.

چون برای مثال اگر بخواهد cجواب ما باشـــد فقط گفتن پایداری کافی نیســـت. باید شرط دیگری هم کنارش باشد مثلا «قطب های حلقه بسته در RHP باشد».

برای b: « قطب ها در LHP باشــد» یا به عبارت بهتر یا زیرکانه تر« ســیســتم علّی باشد».

برای a: « قطب ها مختلف العلامه باشند»

پس صورت سوال به شکل زیر تغییر میکند:

محدوده k راچنان بیابید که ســیســتم حلقه بســته علّی و پایدار باشــد.«قطب ها باید حقیقی باشند»

$\Delta(\mathbf{s}) = \mathbf{s}^2 + \mathbf{s} + \mathbf{k}$ $\quad$ $\mathbf{s}_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ $\quad$ $\Delta(\mathbf{s}) = \mathbf{b}^2 - 4\mathbf{ac}$

$s_1 = \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 - 4k}\,)$ $\quad$ $s_2 = \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1 - 4k}\,)$

$1 - 4k > 0$ ⟶ شرط حقیقی بودن قطب ها ⟶ $K < \frac{1}{4}$

$s_1 , s_2 < 0$ ⟶ شرط منفی بودن قطب ها

$s_1 \longrightarrow \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{1 - 4k}\,) < 0 \longrightarrow \sqrt{1 - 4k} < 1$

$K > 0 \longleftarrow 1 - 4k < 1$

$s_2 \longrightarrow \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{1 - 4k}\,) < 0$ ⟶ همواره برقرار است

محدوده ی k ⟶ $0 < K \leq \frac{1}{4}$ $\quad$ این تساوی مهمه

اگر $k=0$ باشد یکی از قطب ها روی صفر و یکی روی ۱- می باشد و شرط پایداری و علّی بودن برقرار نمی شود اما اگر $k=\frac{1}{4}$ باشد هر قطب با هم جمع می شوند و روی هم در نقطه $-\frac{1}{2}$ می افتد.

ج) به ازای $k=\frac{1}{4}$ پاسخ ضربه سیستم را محاسبه کرده و خواص حافظه داری ، وارون پذیری را بررسی کنید.

اینکه در حوزه زمان بررسی کنیم یا لاپلاس به خودمان بستگی دارد.

حافظه داری را به راحتی میتوانیم از هردو بررســـی کنیم که هر دو هم حافظه دارند اما وارون پذیری را نمیتوانیم از $h(t)$ بررسی کنیم:

دو شرط را باید بررسی کنیم:

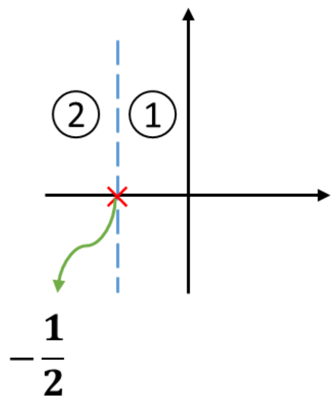
$$H(s)=\frac{\frac{1}{4}}{s^2+s+\frac{1}{4}} \longrightarrow h(t)=\frac{1}{4}\, t\, e^{-\frac{1}{2}t}\, u(t)$$

$$H(s)^{inv}= 4s^2+4s+1 \longrightarrow h(t)^{inv}= 4\,\delta''(t)+4\,\delta'(t) + \delta(t) \longrightarrow \text{وارون پذیر}$$

i)

که دارند چون $ROC_H{}^{inv}$ کل صفحه است ← ROC ها اشتراک داشته باشند

ROC_H هم ناحیه ی 1 شکل زیر است:

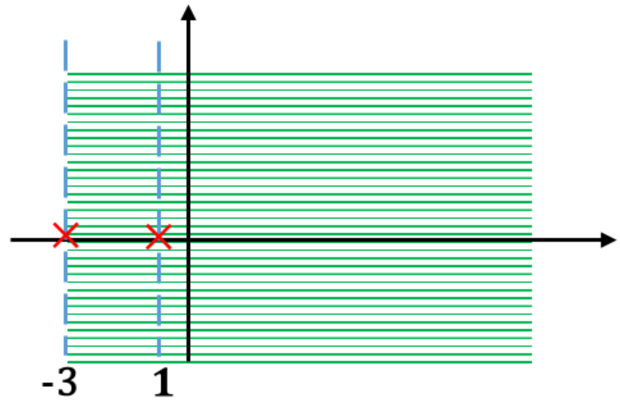


ii)

این شرط هم برقرار است چون تمام قطب ها در LHP است ← حذف صفر و قطب ناپایدار صورت نگیرد در RHP

د) به ازای $k=\frac{1}{4}$ پاسخ به ازای ورودی $e^{-3t}u(t)$ را محاسبه کنید.

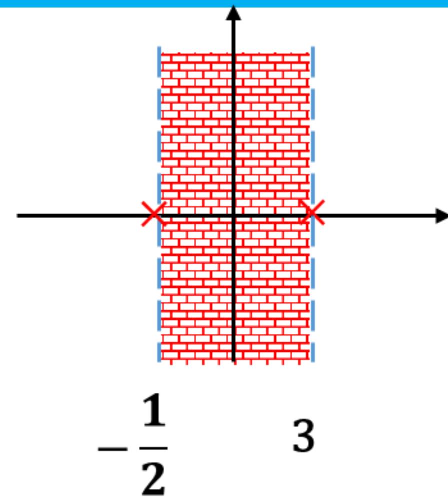
$$R(s)=\frac{1}{s+3} \qquad Re\{s\} > -3$$



$$y(s)=H(s).R(s) \longrightarrow Re\{s\} > -\frac{1}{2}$$ در حالت فوق:

$$=\frac{\frac{1}{4}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2 (s+3)} = \underline{\qquad\qquad} + \underline{\qquad\qquad}$$

$$y(t) = \left(A\, t\, e^{-\frac{1}{2}t} + B e^{-3t}\right) u(t)$$



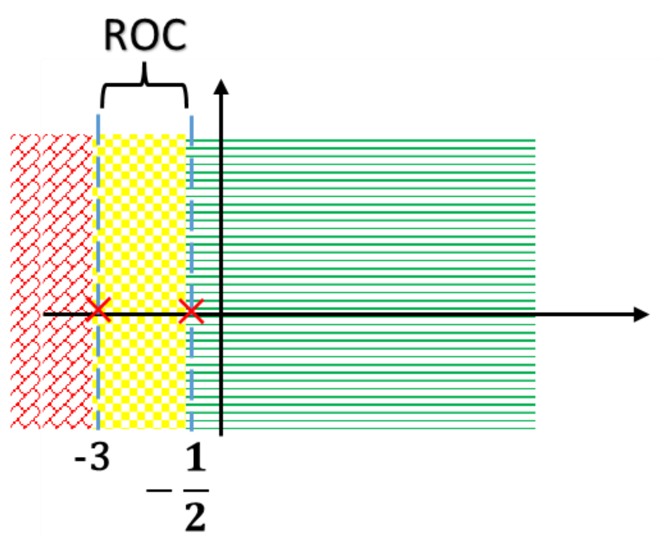
$$R(s)=\frac{-1}{s-3} \qquad \mathrm{Re}\{s\}<3$$

$$y(t) = A\,t\,e^{-\frac{1}{2}t}\,\mathrm{u}(t) + Be^{+3t}\mathrm{u}(-t)$$

اما اگر $ROC_{-\frac{1}{2}}$ به جای راستگرد بودن چپ گرد بود:

باید ناحیه اشتراکی را در نظر بگیریم و در جواب برای $-\frac{1}{2}$ یک u(-t) و برای 3- یک u(t) بگذاریم.

و) پاسخ به ازای ورودی $r(t) = e^{3t}\,u(t)$ را بیابید.



۵) پاسخ به ازای ورودی $r(t) = \cos(\pi t)$ را بیابید.

اما R(s) نداریم چون ورودی متناوب است اکنون H(s) به H(ω) تبدیل می شود و باید یک ROC پایدار انتخاب شود . «به جای s ، j ωمی گذاریم »

$$H(s)=\frac{\frac{1}{4}}{\left(s+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$H(s) \longrightarrow H(\omega) \qquad H(\omega)=\frac{\frac{1}{4}}{\left(j\omega+\frac{1}{2}\right)^2}$$

$$\longrightarrow R(\omega)=\pi\delta(\omega-\pi)+\pi\delta(\omega+\pi)$$

$$Y(\omega)=R(\omega).\,H(\omega) \longrightarrow Y(t)\ \checkmark$$