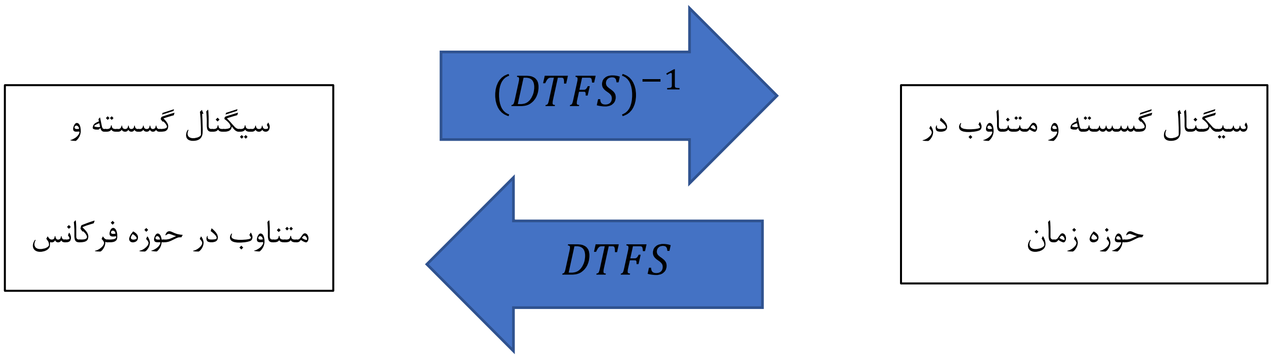
سری فوریه گسسته در زمان (D.T.F.S) :



$x(n) = x(n+N_0) \dashrightarrow N_0$ دوره تناوب اصلی , $\Omega_0 = \dfrac{2\pi}{N_0}$ عدد صحیح N_0

$$\boldsymbol{a_k = \frac{1}{N_0}\sum_{<N_0>} x(n).e^{-jk\Omega_0 n}}$$

اکنون سوال این است که می‌دانیم a_k اما با چه دوره تناوبی؟

$$a_k = \frac{1}{N_0}\sum_{<N_0>} x(n).e^{-jk\Omega_0 n} \qquad ; \quad k \to k+m$$

$$a_{k+m} = \sum_{<N_0>} x(n).e^{-j(k+m)\Omega_0 n} = \sum_{<N_0>} x(n).e^{-jk\Omega_0 n}.e^{-jm\Omega_0 n} \qquad *$$

برای اینکه رابطه * با a_k برابر باشد باید مقدار $e^{-jm\Omega_0 n}$ برابر ۱ باشد :

$$e^{-jm\Omega_0 n} = 1 \Rightarrow m_0.\frac{2\pi}{N_0} = 2\pi \Rightarrow m = N_0$$

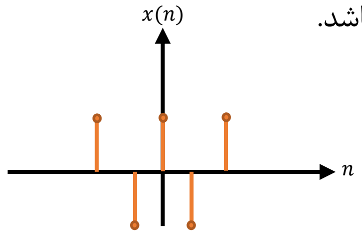
$$\boldsymbol{x(n) = \sum_{<N_0>} a_k.e^{+jm\Omega_0 n}}$$

سوال : چطوری می‌شود که $x(n)$ خودش گسسته متناوب باشد و ضرایبی بسازد که آنها هم گسسته متناوب باشند؟!

سعی می‌کنیم با یک مثال پاسخ این سوال را بدهیم :

نکته: کران سیگما باید به طول دوره تناوب باشد.

مثال :

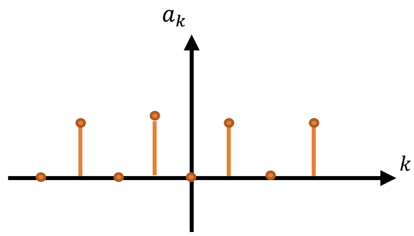


$$x(n) = (-1)^n$$

$$N_0 = 2 \longrightarrow \Omega_0 = \pi$$

$$a_k = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{1} x(n)e^{-jk\pi n} = \frac{1}{2}\left[x(0) + x(1)e^{-jk\pi}\right] = \frac{1}{2}\left[1 - e^{-jk\pi}\right]$$

$$= \begin{cases} 1 & \text{فرد } k \\ 0 & \text{زوج } k \end{cases}$$



اکنون با داشتن a_k به $x(n)$ برسیم :

$$\boldsymbol{x(n) = \sum_{<N_0>} a_k . e^{+jk\pi n} = \sum_{k=0}^{1} a_k . e^{+jk\pi n} = a_0 \overset{0}{\cancel{+}} a_1 e^{j\pi n} = e^{j\pi n} = (-1)^n}$$

مثال‌های دیگری که برای ما حائز اهمیت هستند توابع مثلثاتی هستند :

$$x(n) = 1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2}n\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{4}n\right):$$

در دنیای پیوسته :

$$x(t) = 1 + \cos\left(\frac{3\pi}{2}t\right) + \sin\left(\frac{5\pi}{4}t\right) \quad => \quad \omega_0 = \frac{\pi}{4}$$

$$a_0 = 1 \quad , \quad a_6 = a_{-6} = \frac{1}{2} \quad , \quad a_5 = \frac{1}{2j} , a_{-5} = -\frac{1}{2j}$$

اکنون سوال این است که آیا در دنیای گسسته هم به این ترتیب است؟

ادامه مثال : *با استفاده از رابطه اویلر داریم :*

$$1+\frac{1}{2}e^{\frac{6\pi}{4}nj}+\frac{1}{2}e^{\frac{-6\pi}{4}nj}+\frac{1}{2j}e^{\frac{5\pi}{4}nj}-\frac{1}{2j}e^{\frac{-5\pi}{4}nj} => \Omega_0=\frac{\pi}{4}\rightarrow N_0=8$$

$$\boldsymbol{x(n)=\sum_{<8>} a_k.e^{+j\Omega_0 nk}} \quad *$$

رابطه $x(n)$ به ما اجازه نمی دهد تا a_{-6} تا a_6 را ایجاد کنیم

و این با روند قبلی ما همخوانی ندارد.

$$\begin{cases} 1 & k \text{ فرد} \\ 0 & k \text{ زوج} \end{cases}$$

یک ایده برای حل این مشکل دوبرابر کردن دوره تناوب است :

در مثال قبل :
$$\boldsymbol{x(n)=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{3} a_k.e^{+jk\pi n}=\frac{1}{2}\{e^{j\pi n}+e^{3j\pi n}\}=\frac{1}{2}e^{j\pi n}\{\overbrace{1+e^{2j\pi n}}^{2}\}}$$

$$=\frac{2\boldsymbol{e^{j\pi n}}}{\boldsymbol{2}}=\boldsymbol{e^{j\pi n}}$$

پس به این نتیجه می‌رسیم که می‌توانیم کران را دو برابر کنیم و پاسخ را نصف کنیم.

$$*=\frac{1}{2}\sum_{<16>}\boldsymbol{a_k.e^{+j\Omega_0 nk}}=\boldsymbol{\frac{1}{2}\sum_{-7}^{+8}a_k.e^{+\frac{jnk\pi}{4}}}$$

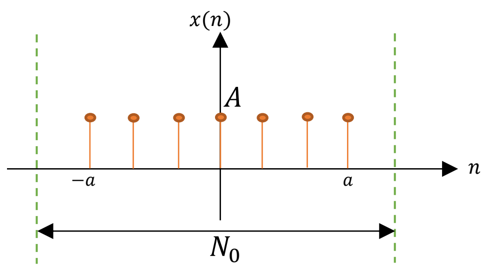
$$=\frac{1}{2}\{a_{-7}\boldsymbol{e^{-7jn\frac{\pi}{4}}}+a_{-6}\boldsymbol{e^{-6jn\frac{\pi}{4}}}+\cdots+\boldsymbol{a_0}+\cdots+a_7\boldsymbol{e^{+7jn\frac{\pi}{4}}}+a_8\boldsymbol{e^{8jn\frac{\pi}{4}}}$$

$$\frac{1}{2}a_{-6}=\frac{1}{2} \qquad and \qquad \frac{1}{2}a_6=\frac{1}{2} \quad => a_{-6}=a_6=1 \ , \qquad a_0=2$$

$$\frac{1}{2}a_{-5}=-\frac{1}{2j} \qquad and \qquad \frac{1}{2}a_5=\frac{1}{2j} \quad => a_5=a_{-5}^*=\frac{1}{j}$$

نکته: اگر دوره تناوب سیگنال‌های مثلثاتی را دو برابر فرض کنیم ضرایب سری فوریه دقیقا همانند پیوسته ظاهر می‌شوند ولی نکته این است که ترجیحا سیگنال‌های مثلثاتی گسسته را به روال $forward$ حل کنید.

$rect$ گسسته :



$$N_0 > 2a$$

N و a صحیح اند

$$a_k = \frac{1}{N_0}\sum_{-a}^{a} \boldsymbol{x(n).e^{-jk\Omega_0 n}} = \frac{A}{N_0}\left[\frac{\boldsymbol{e^{-jk\Omega_0(-a)} - e^{-jk\Omega_0(a+1)}}}{1-\boldsymbol{e^{-jk\Omega_0}}}\right]$$

$$= \frac{A}{N_0}\left[\frac{\boldsymbol{e^{+jk\Omega_0 a} - e^{-jk\Omega_0 a} + e^{-jk\Omega_0}}}{1-\boldsymbol{e^{-jk\Omega_0}}}\right]$$

$$= \frac{A}{N_0}.\frac{\boldsymbol{e^{-jk\frac{\Omega_0}{2}}}}{\boldsymbol{e^{-jk\frac{\Omega_0}{2}}}}.\frac{\boldsymbol{e^{+jk\Omega_0\left(a+\frac{1}{2}\right)} - e^{-jk\Omega_0\left(a+\frac{1}{2}\right)}}}{\boldsymbol{e^{+jk\frac{\Omega_0}{2}} - e^{-jk\frac{\Omega_0}{2}}}}$$

$$= \frac{A}{N_0}.\frac{sin\left(\boldsymbol{k\Omega_0\left(a+\frac{1}{2}\right)}\right)}{\sin\left(\boldsymbol{k\frac{\Omega_0}{2}}\right)} \quad \dashrightarrow \quad sinc \text{ گسسته}$$

خصوصیات ضرایب سری فوریه گسسته همانند خصوصیات ضرایب سری فوریه پیوسته هستند، پس حتی می توان اینگونه گفت که خصوصیات ضرایب سری فوریه گسسته تدریس شد!!!

خواص سری فوریه ی گسسته :

۱. خطی بودن:

$$x(n) \longrightarrow N_x \longrightarrow a_k$$

$$y(n) \longrightarrow N_y \longrightarrow b_k$$

$$Z(n)=A\,x(n)+B\,y(n) \longrightarrow N_x=N_y \longrightarrow c_k=A\,a_k+B\,b_k$$

$$N_x \neq N_y \longrightarrow \text{ک.م.م}\ \{N_x, N_y\}=N.$$

$$\left.\begin{array}{l} a_{k(new)} \longleftrightarrow N. \\ b_{k(new)} \longleftrightarrow N. \end{array}\right\} \; c_k=A\,a_{k(new)}+B\,b_{k(new)}$$

۲. شیفت در حوزه زمان:

$$x(n-m) \longrightarrow N_x \longrightarrow c_k=e^{-jk\Omega.m}\,a_k$$

۳. شیفت در حوزه فرکانس: " backward "

$$e^{+jn\Omega.m}\,x(n) \longleftarrow N_x \longleftarrow a_{k-m}$$

۴. وارونگی زمانی:

$$x(-n) \longrightarrow N_x \longrightarrow a_{-k}$$

۵. تغییر مقیاس زمانی یا scaling: (انبساط – انقباض)

در این حالت در اثر انقباض یک سری از داده‌ها حذف می شوند پس رابطه‌ای برایش نداریم اما برای انبساط می‌توانیم رابطه‌ای پیدا کنیم.

۶. کانولوشن در حوزه زمان:

$$x(n) \longrightarrow N_x \longrightarrow a_k$$

$$h(n) \longrightarrow N_h \longrightarrow b_k$$

$$y(n) \longrightarrow N_. \longrightarrow c_k$$

الف) $N_. = N_x = N_h \longrightarrow c_k = N.\, a_k b_k$

۷- ضرب در حوزه زمان:

ب) $N. =$ ک.م.م $\{N_x, N_y\} \longrightarrow c_k = N.\, a_{k(new)} b_{k(new)}$

۸- اتحاد پارسوال:

$$x(n).h(n) \longrightarrow N. \longrightarrow c_k = a_k * b_k$$

$$\frac{1}{N_x}\sum_{<N_x>}|x(n)|^2 = \sum_{<N_x>}|a_k|^2$$

$$A\ \mathrm{rect}\left(\frac{n}{2a}\right) \longrightarrow N. > 2a \longrightarrow a_k = \frac{A}{N.}\frac{\sin\left(k\Omega.\left(a+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{k\Omega.}{2}\right)}$$

$$3\ \mathrm{rect}\left(\frac{n}{6}\right) \longrightarrow N. = 10 \longrightarrow a_k = \frac{3}{10}\frac{\sin\left(\frac{7k\pi}{10}\right)}{\sin\left(\frac{k\pi}{10}\right)}$$

``

$$\sum_{<10>}\left(\frac{\sin(\frac{7k\pi}{10})}{\sin(\frac{k\pi}{10})}\right)^2=?$$

$\frac{9}{100}$

خودمون اضافه کردیم

خواسته سوال

بنابه پارسوال $\sum_{<N_x>}|a_k|^2$

$$\frac{1}{10}\sum_{-3}^{3}(3)^2=\frac{9}{10}\times ?$$

ما ابتدا سوال رو حل کردیم و سپس طرح کردیم و اما چطور تشخیص بدیم که زیگما فوق به rect شبیه است.

$$\frac{\sin(\frac{7k\pi}{10})}{\sin(\frac{k\pi}{10})}=\frac{\sin(k\Omega_{.}(a+\frac{1}{2}))}{\sin(\frac{k\Omega_{.}}{2})}$$

$$N_{.}\longrightarrow \Omega_{.}=\frac{2\pi}{10}\longrightarrow \Omega_{.}=\frac{\pi}{5}\Rightarrow N_{.}=10$$

$$\frac{7\pi}{10}=\frac{\pi}{5}\left(a+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow a$$

کاری که طراح میتواند انجام دهد این است که کران زیگما را تغییر دهد و .N نگذارد.

9 – مزدوج زمان:

$$X^*(n) \longrightarrow N_x \longrightarrow a^*_{-k}$$

۱۰. دوگانی:

دوگانی در جایی مطرح است که ما در حوزه ی زمان هیچ موضوعی درباره‌ی این نمی‌دونیم که مثلا $\frac{1}{1+t^2}$تبدیل فوریه‌ی چی هست اما اگر به جای t هایش w بگذاریم می‌توانیم به راحتی بفهمیم که تبدیل فوریه چی هست.

$$x(t) \longrightarrow a_k$$

$$a(t) \longrightarrow ?$$

$$a(t)=\begin{cases} \frac{1}{2} & t=\pm 1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

راهنمایی:

$$x(t) \longrightarrow X(w)$$

$$x(t+T_.) \longrightarrow a_k=\frac{1}{T_.}\, X(kw_.)$$

ضریب سری فوریه برای سیگنالی
که خودمون متناوبش کردیم

سوال: آیا خاصیت دوگانی برای ضرایب سری فوریه گسسته نیز برقرار است؟

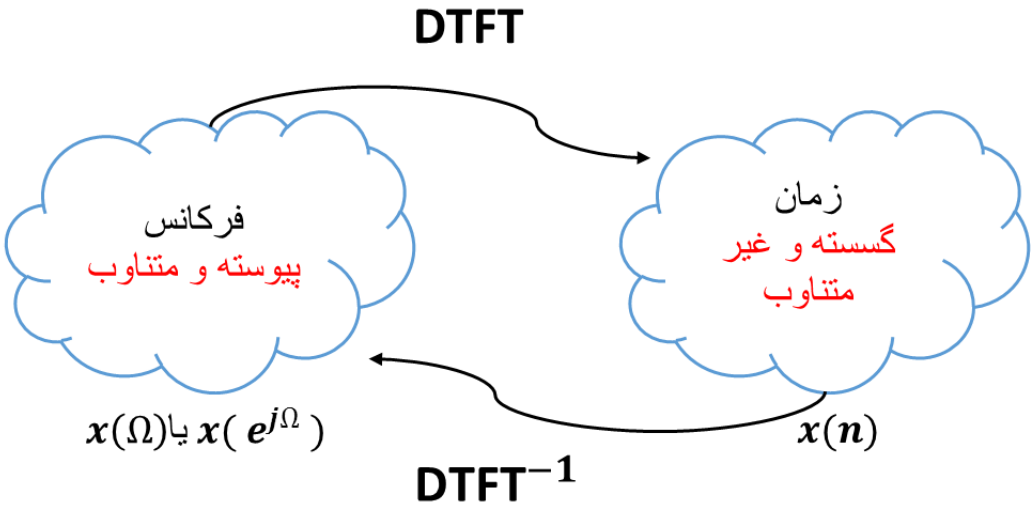
$$x(n) \longrightarrow N_x \longrightarrow a_k$$

$$a(n) \longrightarrow \frac{1}{N.} X(-k)$$

$$x(n)=(-1)^n \longrightarrow N_x=2 \longrightarrow a_k \begin{cases} 1 & \text{فرد } k \\ 0 & \text{زوج } k \end{cases}$$

$$a(n)= \begin{cases} 1 & \text{فرد } n \\ 0 & \text{زوج } n \end{cases} \longrightarrow \frac{1}{N.} X(-k)$$

تبدیل فوریه گسسته:



$$x(\Omega)=\sum_{-\infty}^{+\infty} x(n)e^{-j\Omega n}$$

$$x(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{<2\pi>} x(\Omega)\, e^{+j\Omega n}\, d\Omega \longrightarrow$$ دوره تناوب 2π

1. $x(n)=\delta(n) \longleftrightarrow x(\Omega)=1$

2. $x(n)=u(n) \longleftrightarrow x(\Omega)=\sum_{n=0}^{+\infty} 1.\, e^{-j\Omega n} \Rightarrow ? \quad \frac{1}{1-e^{-j\Omega}}$

باز هم مشکل قبلی در مورد$u(t)$ اینجا برقرار است.

3. $x(n)=(\frac{1}{2})^{n}.u(n) \longleftrightarrow x(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$

$$x(\Omega)=\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^{n}.e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2}e^{-j\Omega})^{n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega}}$$

4. $x(n)=(2)^{n}.u(-n) \longleftrightarrow x(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{+j\Omega}}$

$$x(\Omega)=\sum_{n=-\infty}^{0}(2)^{n}.e^{-j\Omega n}=\sum_{n=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^{n}.e^{+j\Omega n}=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{+j\Omega}}$$

5. $x(n)=(2)^{n}.u(-n-1) \longleftrightarrow x(\Omega)=\frac{e^{+j\Omega}}{2-e^{+j\Omega}}$

همان مورد 4 است
یکی ازش کم میکنیم

$$x(\Omega)=\frac{1}{1-\frac{1}{2}e^{+j\Omega}}-1=\frac{\frac{1}{2}e^{+j\Omega}}{1-\frac{1}{2}e^{+j\Omega}}=\frac{e^{+j\Omega}}{2-e^{+j\Omega}}$$

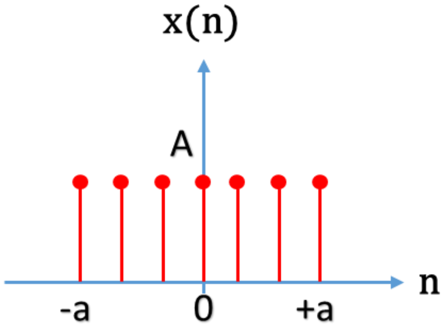
6. $x(n)=(2)^{n}.u(n) \longleftrightarrow x(\Omega)=\infty$

نتیجه: سیگنال های ناپایدار گسسته تبدیل فوریه ندارند.

7. $x(n)=A\ \mathrm{rect}(\frac{n}{2a})$

$$X(\Omega)=\sum_{n=-a}^{+a} A.\, e^{-j\Omega n}$$

$$= A\ \frac{e^{-j\Omega(-a)}-e^{-j\Omega(a+1)}}{1-e^{-j\Omega}} = A\ \frac{\sin\left(\Omega\left(a+\frac{1}{2}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\Omega}{2}\right)}$$



نکته1: اگرتبدیل فوریه گسسته سیگنالی $X(\Omega)$ باشد،آنگاه سیگنال را $N.$ متناوب می کنیم و a_k یا ضریب سری فوریه برابر خواهد بود با:

$$a_k=\frac{1}{N.}\ X(k\Omega.)$$

نکته2: تبدیل فوریه یک سیگنال متناوب و گسسته از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$x(n) \longrightarrow N.\,,\Omega. \longrightarrow a_k \longrightarrow X(\Omega)$$

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\ \delta(\Omega\text{-}k\Omega.)$$

خواص تبدیل فوریه ی گسسته:

$x(n) \longrightarrow X(\Omega)$

$h(n) \longrightarrow H(\Omega)$

۱. خطی بودن:

$A\,x(n) + B\,h(n) \longrightarrow A\,X(\Omega) + B\,H(\Omega)$

۲. شیفت در حوزه زمان:

$x(n-n_.) \longrightarrow e^{-j\Omega n_.} . X(\Omega)$

به دست آوردن تبدیل فوریه ی پله:

گرفتن تبدیل فوریه از طرفین $\longleftarrow$ $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$

$1 = X(\Omega) - e^{-j\Omega} . X(\Omega) \longrightarrow X(\Omega) = \dfrac{1}{1 - e^{-j\Omega}}$

۴. شیفت در حوزه فرکانس:

$e^{+j\Omega_. n} . x(n) \longleftrightarrow H(\Omega - \Omega_.)$

بقیه خواص همانند قبل..

سوال:

$$y(n)-\frac{1}{2}y(n-1)=x(n)+\frac{1}{2}x(n-1)$$

الف) پاسخ فرکانسی H(Ω) را بیابید.

فوریه از طرفین: $\mathrm{Y}(\Omega)[\,1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}] \;=\mathrm{X}(\Omega)[\,1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}]$

$$\Rightarrow \mathrm{H}(\Omega)=\frac{[\,1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}]}{[\,1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}]}$$

ب) پاسخ ضربه h(n) را بیابید و خواص علّی بودن، پایداری و حافظه داری را بررسی کنید.

$$\mathrm{H}(\Omega)=\frac{[\,1+\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}]}{[\,1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}]}=\frac{1}{[\,1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}]}+\frac{\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}}{[\,1-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega}]}$$

$$\Rightarrow \mathrm{h}\,(\mathrm{n})=(\tfrac{1}{2})^{n}.\,\mathrm{u}(\mathrm{n})+\tfrac{1}{2}\,(\tfrac{1}{2})^{n-1}.\,\mathrm{u}(\mathrm{n}-1)$$

پایدار ، علّی ، حافظه دار

ج) با توجه به ورودی $x(n) = \cos(\frac{n\pi}{2})$ خروجی y(n) را بیابید.

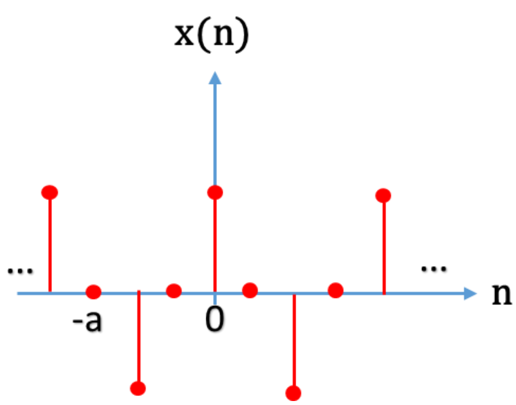
اگر x(n) متناوب نباشد و به صورت مقابل باشد: $X(n) = (\frac{1}{4})^n . u(n)$

$$x(\Omega) = \frac{1}{1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega}} \longrightarrow Y(\Omega) = H(\Omega).X(\Omega)$$

$$\longrightarrow \frac{[1+\frac{1}{2}e^{-j\Omega}]}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})} \longrightarrow \frac{A}{(1-\frac{1}{2}e^{-j\Omega})} + \frac{B}{(1-\frac{1}{4}e^{-j\Omega})}$$

$$\Rightarrow y(n) = A(\frac{1}{2})^n . u(n) + B(\frac{1}{4})^n . u(n)$$

اما سوال اصلی: $x(n) = \cos(\frac{n\pi}{2})$



N.=4

$$a_k = \frac{1}{4}\sum_{n=-1}^{2} x(n).\, e^{-jk\Omega.n} = \frac{1}{4}\left[1 - e^{-jk\pi}\right]$$

$$X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, \delta(\Omega - k\Omega.)$$

$$Y(\Omega) = H(\Omega).\, X(\Omega)$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \underbrace{a_k H(k\Omega.)}_{b_k}\, \delta(\Omega - k\Omega.)$$

$$x[n] = a^n u[n] \quad |a| < 1$$

$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a^n u[n] e^{-j\omega n}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} (ae^{-j\omega})^n = \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$a^n u[n] \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{1 - ae^{-j\omega}}$$

$$|X(e^{j\omega})| = \frac{1}{\sqrt{1 - 2a\cos\omega + a^2}}$$

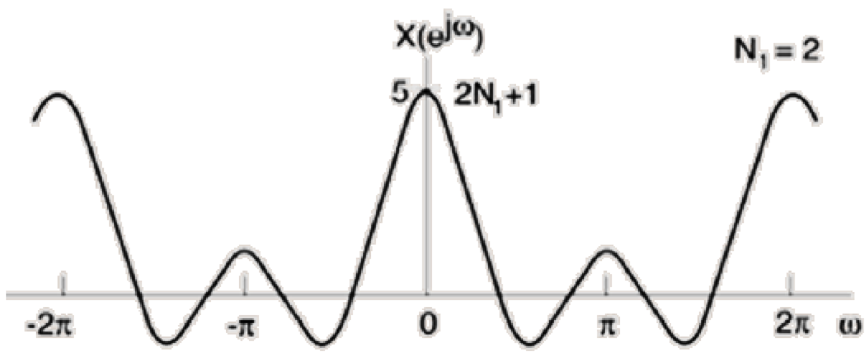
$$\angle X(e^{j\omega}) = -\arctan\left(\frac{a\sin\omega}{1 - a\cos\omega}\right)$$

$$a^{|n|} \quad (|a| < 1) \xleftrightarrow{FT} \frac{1 - a^2}{1 - 2a\cos\omega + a^2}$$

$$x[n] = u[n+N_1] - u[n-N_1-1] = \begin{cases} 1 & |n| \le N_1 \\ 0 & |n| > N_1 \end{cases}$$

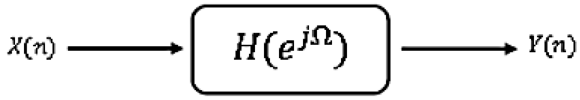
$$X(e^{j\omega}) = \sum_{n=-N_1}^{N_1} e^{-j\omega n} = e^{j\omega N_1} \sum_{m=0}^{2N_1} e^{-j\omega m} = \frac{e^{j\omega(N_1+1/2)}}{e^{j\omega(1/2)}} \frac{1-e^{-j\omega(2N_1+1)}}{1-e^{-j\omega}}$$

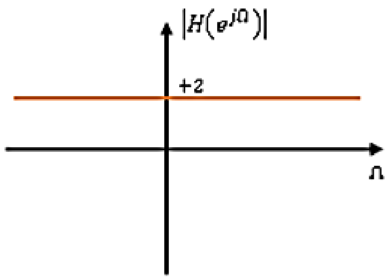
$$= \frac{e^{j\omega(N_1+1/2)} - e^{-j\omega(N_1+1/2)}}{e^{j\omega/2} - e^{-j\omega/2}} = \frac{\sin(\omega(N_1+1/2))}{\sin(\omega/2)}$$

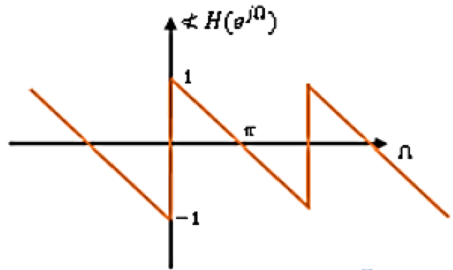


Lecture 07

سوال: سیستم زیر را در نظر بگیرید :







الف) خروجی سیستم به ازای ورودی $x(n) = cos(\frac{\pi}{3}n)$ بدست آورید.

ب) مقدار $h(0)$ و زاویه $h(n)$ را بدست آورید.

حل الف: ابتدا تبدیل فوریه ورودی را محاسبه میکنیم زیرا پاسخ ضربه را در حوزه فرکانس داریم :

$$x(n) = cos\left(\frac{\pi}{3}n\right) \Rightarrow N_0 = 6 \ , a_1 = a_{-1} = \frac{1}{2} \quad \Rightarrow X(\Omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{\pi}{3}k)$$

$$Y(\Omega) = X(\Omega) \cdot H(\Omega) = H(\Omega) \cdot 2\pi \cdot \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k \delta(\Omega - \frac{\pi}{3}k) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} H(\frac{\pi}{3}k) a_k \delta(\Omega - \frac{\pi}{3}k)$$

پس $y(n)$ با دوره تناوب ۶ متناوب بوده و ضرایب سری فوریه آن $b_k = H(\frac{\pi}{3}k)a_k$ میباشد.پس:

$$b_k = H\left(\frac{\pi}{3}k\right)a_k \quad \Rightarrow \quad b_1 = \frac{H\left(\frac{\pi}{3}\right)}{2} = \frac{2e^{\frac{j2}{3}}}{2} = e^{\frac{j2}{3}}\ , b_2 = \frac{H\left(-\frac{\pi}{3}\right)}{2} = e^{-\frac{j2}{3}}$$

$$y(n) = e^{\frac{2j}{3}}e^{\frac{j\pi}{3}n} + e^{-\frac{2j}{3}}e^{\frac{-j\pi}{3}n} = Cos(\frac{\pi}{3}n + \frac{2}{3})$$

حل ب)

مقدار $h(0)$ از رابطه زیر بدست می آید:

$$h(0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} H(\Omega)d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |H|e^{j\measuredangle H}\, d\Omega = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 2e^{(1-\frac{1}{\pi}\Omega)j}d\Omega = -2sin(1)$$

همانطور که مشاده میکنید زاویه تابعی فرد و اندازه تابعی زوج است پس $h(n)$ یک سیگنال حقیقی میباشد و زاویه آن صفر میباشد.