تبدیل فوریه برای سیگنال‌های غیرمتناوب پیوسته در زمان

تبدیل فوریه (Fourier transform)

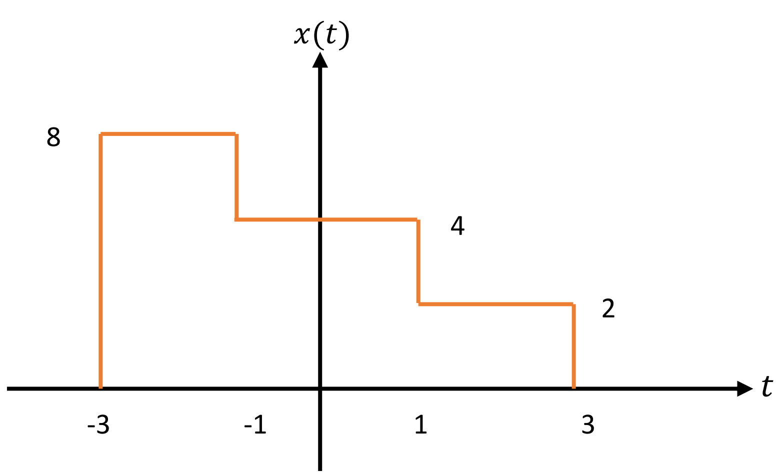
فرکانس $x(f)$		زمان
پیوسته و غیرمتناوب $X(\omega)$	FT ← FT^{-1} →	پیوسته و غیرمتناوب $x(t)$

فرکانس
$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j\omega t}\,dt$$

زمان
$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega).e^{+j\omega t}\,d\omega$$

توجه: ضریب $\frac{1}{2\pi}$ در حوزه زمان برای تبدیل ω به f است.

مثال : تبدیل فوریه سیگنال زیر را بیابید.



$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)d\omega =? \;=>\; 2\pi \times x(0) = 8\pi$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega).e^{-2j\omega}d\omega =? \;=>\; 2\pi \times x(-2) = 16\pi$$

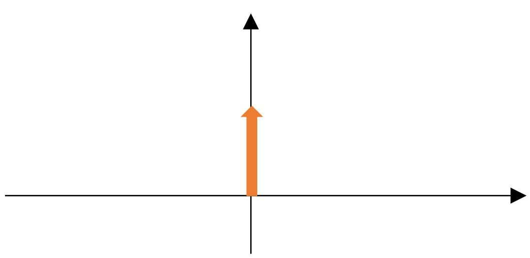
$$\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega)\cos(2\omega)d\omega =? \;=>\; \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega).e^{+2j\omega}d\omega + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega).e^{-2j\omega}d\omega$$

$$= \frac{1}{2}(2\pi \times 8) + \frac{1}{2}(2\pi \times 2) = 10\pi$$

تبدیل فوریه برخی سیگنال‌های مهم :

1) $x(t) = \delta(t)$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t).e^{-j\omega t}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t).e^{-j\omega t}\,dt = 1$$

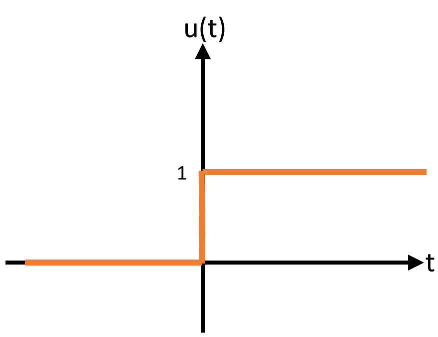


$$X(\omega) = 1$$

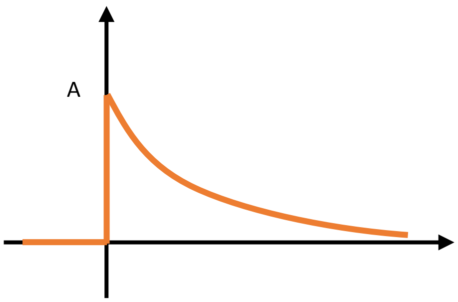
2) $x(t) = u(t)$

نحوه بدست آوردن در صفحه‌های بعد

$$X(\omega) = \overbrace{\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)}$$



$3) x(t) = Ae^{-\alpha t}u(t)$



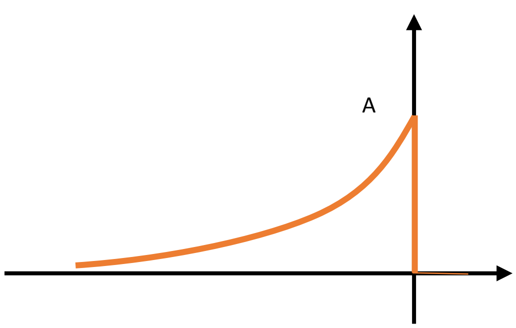
$$X(\omega) = \int_0^{+\infty} Ae^{-\alpha t}.e^{-j\omega t}\,dt = A\int_0^{+\infty} e^{-(\alpha+j\omega)t}\,dt = -\frac{A}{\alpha+j\omega}e^{-(\alpha+j\omega)t}\,\Big|_0^{\infty}$$

$$= 0 + \frac{A}{\alpha+j\omega} \qquad X(\omega) = \frac{A}{j\omega+\alpha}$$

$4) x(t) = Ae^{\alpha t}u(-t)$

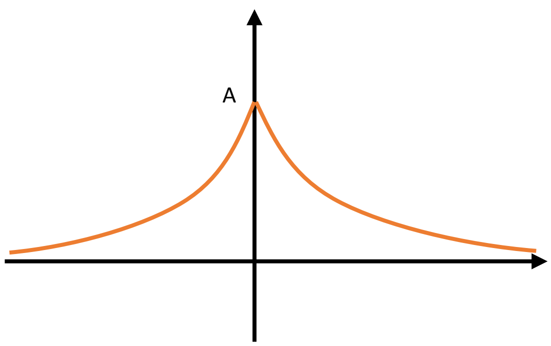
$$X(\omega) = \frac{-A}{j\omega-\alpha}$$

$$X(\omega) = \int_{-\infty}^{0} Ae^{\alpha t}.e^{-j\omega t}\,dt = \frac{A}{\alpha-j\omega}.e^{(\alpha-j\omega)t}\Big|_{-\infty}^{0} = \frac{A}{\alpha-j\omega}$$



$5) x(t) = Ae^{-\alpha|t|} \qquad Ae^{\alpha t}u(-t) + Ae^{-\alpha t}u(t) \qquad \times\times$

$$X(\omega) = \underbrace{\int_{-\infty}^{0} Ae^{\alpha t}.e^{-j\omega t}\,dt}_{Ae^{\alpha t}u(-t)} + \underbrace{\int_{0}^{+\infty} Ae^{-\alpha t}.e^{-j\omega t}\,dt}_{Ae^{-\alpha t}u(t)} = \frac{A}{j\omega+\alpha} + \frac{-A}{j\omega-\alpha} = \frac{2\alpha A}{\omega^2+\alpha^2}$$

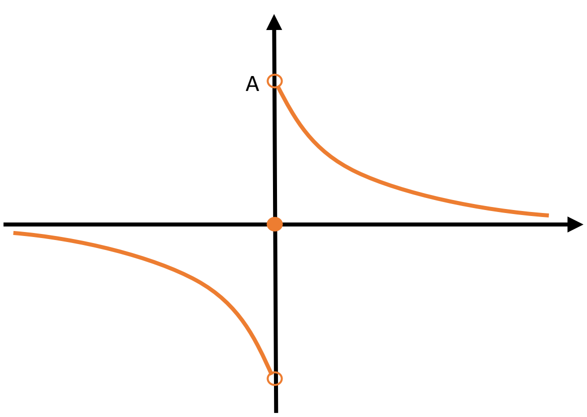


$$X(\omega) = \frac{2\alpha A}{\omega^2+\alpha^2}$$

توجه: یک سیگنال حقیقی زوج نسبت به زمان نتیجه می‌دهد یک سیگنال حقیقی زوج نسبت به ω

$6) x(t) Ae^{-\alpha t}u(t) - Ae^{\alpha t}u(-t)$ سیگنال 4 – سیگنال 3

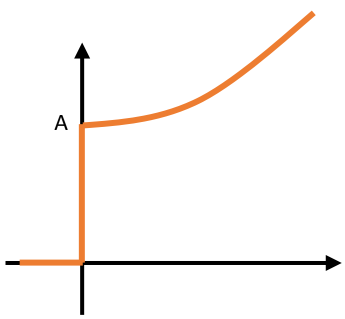
$$X(\omega) = \frac{A}{j\omega+\alpha} - \frac{-A}{j\omega-\alpha} = \frac{-2Aj\omega}{\omega^2+\alpha^2}$$



$$X(\omega) = \frac{-2Aj\omega}{\omega^2+\alpha^2}$$

$7) x(t) = Ae^{+\alpha t}u(t)$

$$X(\omega) = \int_0^{+\infty} Ae^{+\alpha t}.e^{-j\omega t}\,dt = \frac{A}{\alpha - j\omega}e^{(\alpha-j\omega)t}\Big|_0^{+\infty} = \infty$$

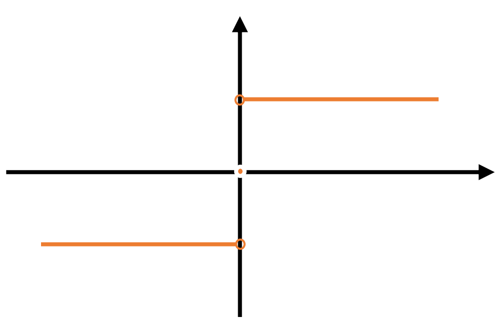


$X(\omega) = \infty$ ندارد

نتیجه مهم : سیگنال‌های ناپایدار تبدیل فوریه ندارند.

$$8) x(t) = sgn(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

با توجه به شکل سیگنال در میابیم که شباهتی به شکل ۶ دارد منتها با $\alpha = 0$ و $A = 1$



$$X(\omega) = \frac{2}{j\omega}$$

اکنون از این سیگنال ایده میگیریم برای پیدا کردن $X(\omega)$ سیگنال پله :

$$x(t) = u(t) = \frac{1}{2}\big(1 + sgn(t)\big) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}sgn(t)$$

اکنون $\frac{1}{2}$ برای ما مشکل ایجاد می‌کند و آن مشکل این است که عدد ثابت با هر دوره تناوبی می‌تواند متناوب باشد پس یک مبحث بزرگ مطرح می‌شود و آن **تبدیل فوریه سیگنال‌های متناوب** است :

$$x(t) = x(t+T_0) \longrightarrow T_0 \longrightarrow a_k$$ ضرایب سری فوریه

یافتن تبدیل فوریه سیگنال متناوب

$$X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k . \delta(\omega - k\omega_0)$$

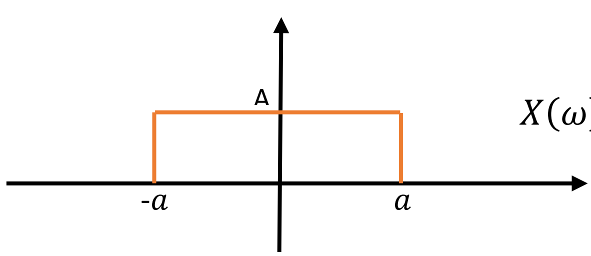
$$x(t) = \frac{1}{2} \longrightarrow T_0 \text{ هر} \longrightarrow a_0 = \frac{1}{2} \longrightarrow X(\omega) = \pi\delta(\omega)$$

تبدیل فوریه بخش دوم را نیز در بالا بدست آوردیم که اگر با هم جمع کنیم $X(\omega)$ سیگنال پله حاصل می شود.

$$9)\ \ x(t) = A\ \ rect(\frac{t}{2a})$$

$$X(\omega) = \int_{-a}^{+a} Ae^{-j\omega t}\, dt = -\frac{A}{j\omega}.e^{-j\omega t}\Big|_{-a}^{+a} = \frac{A}{j\omega}\left(e^{j\omega a} - e^{-j\omega a}\right) = \frac{2A}{\omega}\sin(a\omega)$$

$$\times \frac{a}{a} \ \Rightarrow\ \frac{2aA}{a\omega}\sin(a\omega) = 2aA.sinc(\,2a\,f)$$



$$X(\omega) = \overbrace{2aA}^{\text{مساحت}}.sinc(\overbrace{2a}^{\text{طول}}f)$$

اگر با T_0 متناوب کنیم

$$10)x(t) \;\dashrightarrow\; X(\omega) \;=>\; x(t) = x(t+T_0) \dashrightarrow a_k = \frac{1}{T_0}X(k\omega_0)$$

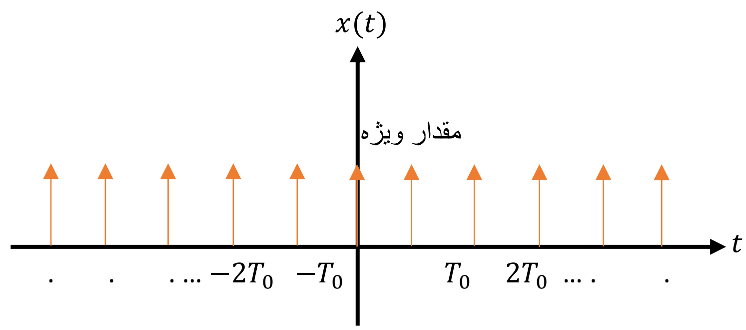
$$11)\; x(t) = x(t+T_0) \dashrightarrow T_0, \omega_0 \dashrightarrow a_k \dashrightarrow X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k.\delta(\omega - k\omega_0)$$

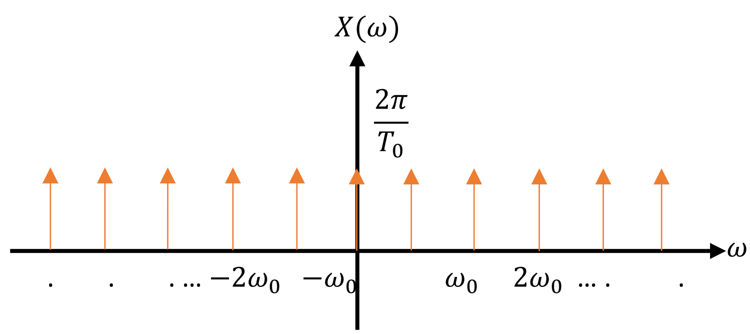
نکته: اگر سیگنالی متناوب هست و a_k دارد و باید a_k اش را پیدا کنیم.

$$12)x(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta(t - mT_0)$$

$$=> \; a_k = \frac{1}{T_0}$$

$$=> \; X(\omega) = \frac{2\pi}{T_0} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - k\omega_0)$$





خواص تبدیل فوریه :

۱- خاصیت خطی بودن :

$$x(t) \dashrightarrow X(\omega) \qquad\qquad y(t) \dashrightarrow Y(\omega)$$

$$ax(t) + by(t) \qquad - \dashrightarrow \qquad AX(\omega) + BY(\omega)$$

۲- خاصیت شیفت در حوزه زمان :

$$x(t) \longrightarrow X(\omega)$$

$$x(t-t_0) \longrightarrow Z(\omega)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} t-t_0 \to r \\ dt \to dr \\ t|_{-\infty}^{+\infty} \to r|_{-\infty}^{+\infty} \end{array}}$$

$$Z(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-t_0).e^{-j\omega t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} x(r).e^{-j\omega(r+t_0)}dr=e^{-j\omega t_0}.X(\omega)$$

۳- خاصیت وارونگی زمانی :

$$x(t) \longrightarrow X(\omega)$$

$$x(-t) \longrightarrow Z(\omega)$$

$$Z(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(-t).e^{-j\omega t}dt=X(-\omega)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} -t \to r \\ dt \to -dr \\ t|_{-\infty}^{+\infty} \to r|_{-\infty}^{+\infty} \end{array}}$$

۴- خاصیت تغییر مقیاس زمانی :

$$x(t) \longrightarrow X(\omega)$$

$$x(at) \longrightarrow Z(\omega)$$

$$if \quad a>0 \ \to Z(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(at).e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{a}X(\frac{\omega}{a})$$

$$\boxed{\begin{array}{l} at \to r \ \to dt \to \frac{1}{a}dr \\ t|_{-\infty}^{+\infty} \to r|_{-\infty}^{+\infty} \end{array}}$$

$$if \quad a<0 \ \to Z(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} x(at).e^{-j\omega t}dt=-\frac{1}{a}X\left(\frac{\omega}{a}\right)$$

$$\boxed{\begin{array}{l} at \to r \ \to dt \to \frac{1}{a}dr \\ t|_{-\infty}^{+\infty} \to r|_{-\infty}^{+\infty} \end{array}}$$

۵- شیفت در حوزه فرکانس :

$$X(\omega) \longrightarrow x(t)$$

$$X(\omega-\omega_0)=Z(\omega) \longrightarrow Z(t)$$

$$Z(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} z(t).e^{-j\omega t}dt \quad => \quad X(\omega-\omega_0)=\int_{-\infty}^{+\infty} z(t).e^{-j\omega t}dt$$

$$=> X(W)=\int_{-\infty}^{+\infty} z(t).e^{-j(W+\omega_0)t}dt=\int_{-\infty}^{+\infty} z(t).e^{-j\omega_0 t}.e^{-jWt}dt$$

$$=> x(t)=e^{-j\omega_0 t}.z(t) \to z(t)=e^{+j\omega_0 t}.x(t)$$

$$\boxed{\begin{array}{l}\omega-\omega_0 \to W \\ \omega \to W+\omega_0\end{array}}$$

۶- مشتق در حوزه زمان :

$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega).e^{+j\omega t}d\omega$$

$$\frac{d}{dt}x(t)=\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\omega).e^{+j\omega t}d\omega\right)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega.\left(X(\omega).e^{+j\omega t}\right)d\omega$$

$$=> \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} j\omega X(\omega).e^{+j\omega t}d\omega=j\omega.X(\omega)$$

۷- انتگرال‌گیری در حوزه زمان :

$$x(t) \longrightarrow X(\omega)$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(m)dm \longrightarrow \frac{X(\omega)}{j\omega}+X(0)\pi\delta(\omega)$$

$$=x(t)*u(t) \longrightarrow X(\omega)\left[\frac{1}{j\omega}+\pi\delta(\omega)\right]=\frac{X(\omega)}{j\omega}+X(\omega)\,\pi\delta(\omega)$$

$$\frac{X(\omega)}{j\omega}+X(0)\pi\delta(\omega)$$

۸- کانولوشن در حوزه زمان :

$$x(t)\ \rightarrow\ X(\omega)\quad,\quad y(t)\ \rightarrow\ Y(\omega)\quad,\quad z(t)\rightarrow Z(\omega)$$

$$z(t)=x(t)*y(t)\longrightarrow\ Z(\omega)=X(\omega).Y(\omega)$$

این خاصیت را اثبات نمی‌کنیم چون خیلی ساده است. (با استفاده از انتگرال جزبه‌جز قابل محاسبه است)

۹- مشتق در حوزه فرکانس :

$$X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t).e^{-j\omega t}dt\ =>\frac{d}{d\omega}X(\omega)=\frac{d}{d\omega}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}x(t).e^{-j\omega t}dt\right)$$

$$=>\frac{d}{d\omega}X(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}-jt.x(t).e^{-j\omega t}dt=-jtx(t)$$

۱۰- کانولوشن در حوزه فرکانس :

$$x(t)\ \rightarrow\ X(\omega)\quad,\quad y(t)\ \rightarrow\ Y(\omega)\quad,\quad z(t)\rightarrow Z(\omega)$$

$$Z(\omega)=X(\omega)*Y(\omega)$$

$$z(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Z(\omega).e^{+j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[X(\omega)*Y(\omega)].e^{+j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}[X(m).Y(\omega-m)dm].e^{+j\omega t}d\omega$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}X(m)\left[\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\omega-m).e^{+j\omega t}d\omega\,.e^{+j\omega t}d\omega\right]dm$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty}X(m)\left[\overbrace{\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}Y(\omega-m).e^{+j\omega t}d\omega\,.e^{+j\omega t}d\omega}^{y(t)}\right]dm$$

$$=> z(t) = 2\pi . x(t) . y(t)$$

۱۱- انتگرال در حوزه فرکانس :

$$x(t) \dashrightarrow X(\omega)$$

$$Z(t) \dashrightarrow Z(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(m). dm$$

نکته :

$$\frac{d}{dt}\left[\int_{g(t)}^{f(t)} x(m). dm\right] = f'(t). x\big(f(t)\big) - g'(t). x\big(g(t)\big)$$

$$\frac{d}{dm}\left[\int_{g(t)}^{f(t)} x(m). dm\right] = 0$$

$$x(t) \leftrightarrow \frac{d}{d\omega} Z(\omega) = X(\omega)$$

$$-jtz(t) = x(t) => z(t) = -\frac{1}{jt} x(t) + \cdots \underbrace{\delta(t)}$$

برای فهم بیشتر تحقیق کنید
این بخش از کجا بوجود آمد.

۱۲- مزدوج در حوزه زمان :

$$x^*(t) \dashrightarrow X^*(-\omega)$$

۱۳- اتحاد پارسوال :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |X(\omega)|^2 \, d\omega$$

۱۴- خاصیت دوگانی: اگر سیگنالی در حوزه زمان داشته باشیم که تبدیل فوریه آن را بلد باشیم از این خاصیت بهره می‌گیریم. (این خاصیت برای حل سریع و آسان برخی از سوالات امتحانی خیلی مهم و کاربردی است.)

$$x(t) \xrightarrow{\text{F.T}} X(\omega) \xrightarrow{\omega \to t} X(t) \xrightarrow{\text{F.T}} 2\pi x(-\omega)$$

مثال :

$$x(t) = e^{-|t|} \xrightarrow{\text{F.T}} X(\omega) = \frac{1}{\omega^2 + 1} \xrightarrow{\omega \to t} X(t) = \frac{1}{t^2 + 1}$$

$$X(t) = \frac{1}{t^2 + 1} \xrightarrow{\text{F.T}} 2\pi e^{-|-\omega|} = 2\pi e^{-|\omega|}$$

۱۵- خاصیت حقیقی و مختلط بودن $x(t)$:

$x(t) \dashrightarrow$ حقیقي

- $X^*(-\omega) = X(\omega)$
- $|X(\omega)|$ زوج
- $\measuredangle\ X(\omega)$ فرد
- $F\{x_e(t)\} = Re\{X(\omega)\}$
- $F\{x_o(t)\} = j\ Im\{X(\omega)\}$

$$x(t) = sinc(t) \dashrightarrow X(\omega) = ?$$

با استفاده از خاصیت دوگانی :

$$x(t) \quad \rightarrow \quad X(\omega) \quad \rightarrow \quad X(t) \quad \rightarrow \quad 2\pi x(-\omega)$$

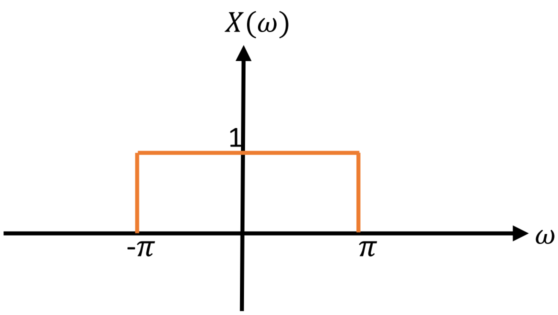
از تبدیل فوریه $rect$ کمک می‌گیریم :

$$F\left\{Arect\left(\frac{t}{2a}\right)\right\} = 2aAsinc(2af)$$

$$sinc(2af) = \frac{\sin(2a\pi f)}{2a\pi f} = \frac{\sin(a.\omega)}{a.\omega} = \frac{\sin\left(\pi\frac{a.\omega}{\pi}\right)}{\pi\frac{a.\omega}{\pi}} = sinc\left(\frac{a.\omega}{\pi}\right)$$

قضیه محاسبه $sinc(t)$هست ولی نحوه بدست آوردنش را نمی‌دانیم پس کاری می‌کنیم که $sinc(\omega)$ ایجاد شود:

$$\frac{1}{2\pi}rect\left(\frac{t}{2\pi}\right) \dashrightarrow sinc(\omega) \dashrightarrow sinc(t) \dashrightarrow 2\pi\frac{1}{2\pi}rect\left(\frac{-\omega}{2\pi}\right) = rect(\frac{\omega}{2\pi})$$



$$\begin{cases} Arect\left(\frac{t}{2a}\right) \dashrightarrow 2A.a.sinc(\frac{a\omega}{\pi}) \\ sinc(t) \quad \dashrightarrow \quad rect\left(\frac{\omega}{2\pi}\right) \end{cases}$$

$$sinc(bt) \dashrightarrow ? \qquad b = \frac{a}{\pi} \rightarrow a = b\pi \quad , \qquad A = \frac{1}{2b\pi}$$

حاصل : $2\pi \times \frac{1}{2b\pi}.rect\left(\frac{\omega}{2\pi b}\right) = \frac{1}{b}rect\left(\frac{\omega}{2\pi b}\right)$

از خاصیت مقیاس زمانی هم می‌توانستیم استفاده کنیم.

$sinc\left(\frac{t}{a}\right) \rightarrow ?$ حاصل : $a.rect(\frac{a.\omega}{2\pi})$

نمونه سوال امتحانی :

اگر معادله دیفرانسیل حاکم بر سیستم LTI به شکل زیر داده شده باشد :

$y'' + 5y' + 4y = x' - 2x$

الف) علیت، حافظه داری و پایداری این سیستم LTI را بررسی کنید.

ب) پاسخ به ازای ورودی $3e^{-2t}u(t)$ را بیابید.

ج) پاسخ به ازای ورودی $1 + \cos(2t)$ را بیابید.

د) آیا سیستم وارون پذیر است؟

$$y(t) = x(t) * h(t) \;\dashrightarrow Y(\omega) = X(\omega).H(\omega) => H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{x(\omega)}$$

$$=> H(\omega) = \frac{F[\text{خروجی}\}}{F\{\text{ورودی}\}}$$

پاسخ ضربه یک سیستم $h(t) : LTI$ | ورودی یک سیستم $x(t) : LTI$

ورودی در حوزه فرکانس : $X(\omega)$ | خروجی یک سیستم $y(t) : LTI$

خروجی در حوزه فرکانس : $Y(\omega)$ | پاسخ فرکانسی : $H(\omega)$

قبل از هر چیزی باید پاسخ فرکانسی سیستم LTI را بدست بیاوریم :

$$H(\omega) = F\{h(t)\}$$

نکته: اگر روی سوال به LTI بودن سیستم اشاره‌ای نکرده باشد. قبل از هر چیز باید آن را اثبات کنیم.

$$Y(\omega)[(j\omega)^2 + 5j\omega + 4] = X(\omega)[j\omega - 2]$$

$$H(\omega) = \frac{Y(\omega)}{x(\omega)} = \frac{j\omega - 2}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4} = \frac{2}{j\omega + 4} + \frac{-1}{j\omega + 1} = \frac{j\omega - 2}{(j\omega + 4)(j\omega + 1)}$$

الف : $h(t) = F^{-1}\{H(\omega)\} = 2e^{-4t}u(t) - e^{-t}u(t) = (2e^{-4t} - e^{-t})u(t)$

علی، حافظه دار و پایدار

ب : $x(t) = 3e^{-2t}u(t) \; => X(\omega) = \dfrac{3}{j\omega + 2}$

$$Y(\omega) = X(\omega).H(\omega) = \frac{3(j\omega - 2)}{(j\omega + 4)(j\omega + 1)(j\omega + 2)} = \frac{A}{j\omega + 4} + \frac{B}{j\omega + 1} + \frac{c}{j\omega + 2}$$

د : $h(t) * h^{inv}(t) = \delta(t)$

با اطلاعاتی که الان داریم می‌توانیم ثابت کنیم هر سیستمی معکوس پذیر است ولی در درس‌های بعدی خواهیم دید که اینطور نیست.

ج : $x(t) = 1 + \cos(2t)$ $\qquad\qquad$ $x(t) = x(t + T_0) \longrightarrow a_k$ متناوب است

$a_0 = 1$

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = a_{-1} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right\} \; X(\omega) = 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k.\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$Y(\omega) = X(\omega).H(\omega) = 2\pi.H(\omega) \overbrace{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k}^{b_k}.\delta(\omega - k\omega_0)$$

$$y(t) = -\frac{1}{2} + |b_1|\sin(2t + \measuredangle b_1)$$

$$= 2\pi \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k.(1 + k\omega_0).\delta(\omega - k\omega_0)$$

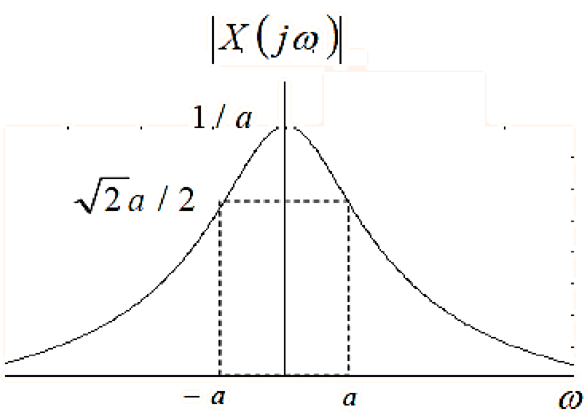
$$b_0 = a_0 H(0) = 1 \times -\frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

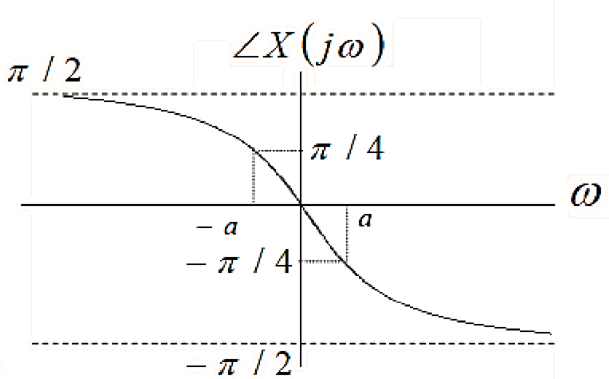
$$\left.\begin{array}{l} b_1 = a_1 H(2) \\ b_{-1} = a_{-1} H(-2) \end{array}\right\}$$ قطعا مزدوج هم اند

مثال:

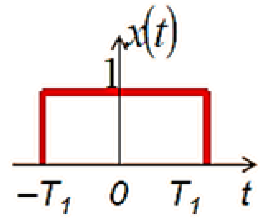
$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a > 0$$

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{FT} \frac{1}{a + j\omega}$$



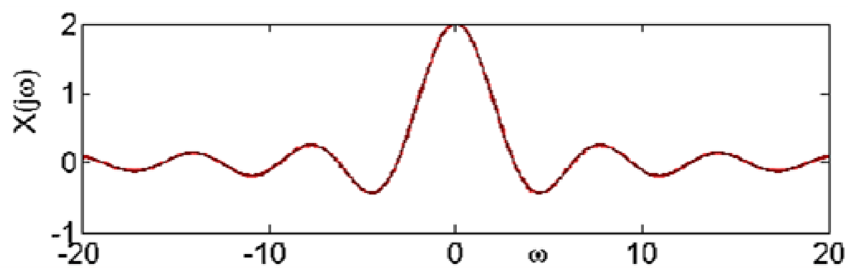


$$x(t)=\begin{cases} 1 & |t|\le T_1 \\ 0 & |t|>T_1 \end{cases}$$

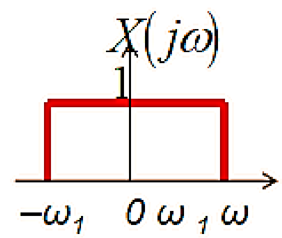


$$X(j\omega)=\int_{-\infty}^{\infty}x(t)e^{-j\omega t}dt$$
$$=\frac{1}{-j\omega}e^{-j\omega t}\Big|_{-T_1}^{T_1}$$
$$=\frac{2\sin(\omega T_1)}{\omega}=2T_1 sinc(\omega T_1)$$

$T_1 = 1$



$$x(j\omega)=\begin{cases} 1 & |\omega|\le \omega_1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$



$$x(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X(j\omega)e^{j\omega t}d\omega=\frac{1}{2\pi}\int_{-\omega_1}^{\omega_1}e^{j\omega t}d\omega$$
$$=\frac{1}{2\pi}\times\frac{1}{jt}e^{j\omega t}\Big|_{-\omega_1}^{\omega_1}$$
$$=\frac{2\sin(\omega_1 t)}{\omega_1 t}=\frac{\omega_1}{\pi}\text{sinc}(\omega_1 t)$$

lecture 06

سوال: حاصل انتگرال های زیر را بدست حل آنها بدست آورید .

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1} dx$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx$$

حل:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1} dx = \frac{1}{4}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{axj}+e^{-axj}}{x^2+1} dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{axj}}{x^2+1} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-axj}}{x^2+1} dx\right)$$

کافیست عکس تبدیل فوریه عبارت $X(w) = \frac{1}{w^2+1}$ را محاسبه کنیم :

$$\mathcal{F}^{-1}\left\{\frac{1}{\omega^2+1}\right\} = \frac{1}{2}e^{-|t|} = x(t)$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1} dx = \frac{1}{4}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{axj}}{x^2+1} dx + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-axj}}{x^2+1} dx\right) = \frac{1}{4}(2\pi \cdot x(a) + 2\pi \cdot x(-a))$$

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(ax)}{x^2+1} dx = \frac{\pi}{2}\left(\frac{1}{2}e^{-|a|} + \frac{1}{2}e^{-|a|}\right) = \frac{\pi}{2}e^{-|a|}$$

قسمت دوم :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2} dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2(x)}{x^2}\, dx \overset{\text{پارسوال}}{\Longrightarrow} \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \left|\mathcal{F}\left\{sinc^2\left(\frac{x}{\pi}\right)\right\}\right| dw$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} sinc^2\left(\frac{x}{\pi}\right) dx = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} \pi^2 rect^2\left(\frac{w}{2}\right) dw = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} rect^2\left(\frac{w}{2}\right) dw = \frac{\pi}{4}\int_{-1}^{1} dw = \frac{\pi}{2}$$