فصل سوم :

تحلیل فوریه سیگنال‌های پیوسته و گسسته در زمان

تحلیل سیگنال‌ها در حوزه فرکانس یکی از مهم‌ترین فصل‌های درس تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها می‌باشد. در این فصل به ترتیب به تحلیل روابط و خواص مربوط به فوریه برای دسته مختلف سیگنال‌ها پرداخته خواهد شد.

الف: روابط و خواص سری فوریه برای سیگنال‌های متناوب پیوسته در زمان

ب: روابط و خواص تبدیل فوریه برای سیگنال‌های غیرمتناوب پیوسته در زمان

ج: روابط و خواص سری فوریه برای سیگنال‌های متناوب گسسته در زمان

د: روابط و خواص تبدیل فوریه برای سیگنال‌های غیرمتناوب گسسته در زمان

حوزه زمان ⇄ حوزه فرکانس «حوزه فوریه اصطلاحاً در این درس»

در حالت کلی هدف از این فصل انتقال مسائل و مشکلات به حوزه فرکانس، حل آنها در حوزه فرکانس و در نهایت بازگرداندن نتایج نهایی به حوزه زمان می باشد. در حالت

سیگنال:

پیوسته در حوزه زمان	↔	در حوزه فوریه قطعا غیرمتناوب
گسسته در حوزه زمان	↔	در حوزه فوریه قطعا متناوب
متناوب در حوزه زمان	↔	در حوزه فوریه قطعا گسسته
غیرمتناوب در حوزه زمان	↔	در حوزه فوریه قطعا پیوسته

سوال: کاربرد انواع فوریه در کجاست؟ «بسیار مهم»

انواع فوریه:

- a_k غیرمتناوب وگسسته ⟵ $x(t)=x(t+T.)$ پیوسته و متناوب ⟵ F.S سری فوریه
- $X(\omega)$ غیرمتناوب و پیوسته ⟵ $x(t)$ پیوسته و غیرمتناوب ⟵ F.T تبدیل فوریه
- a_k متناوب وگسسته ⟵ $x(n)=x(n+N.)$ گسسته و متناوب ⟵ D.T.F.S سری گسسته فوریه
- $X(\Omega)$ متناوب و پیوسته ⟵ $x(n)$ گسسته وغیرمتناوب ⟵ D.T.F.T تبدیل گسسته فوریه

حوزه فرکانس ⇑   حوزه زمان ⇑

۳-۱) روابط و خواص سری فوریه برای سیگنال‌های متناوب پیوسته در زمان

اگر سیگنالی پیوسته و متناوب در حوزه زمان باشد از سری فوریه استفاده می‌کنیم.

سری فوریه:

پیوسته ومتناوب
T.

X(t)

گسسته وغیرمتناوب

a_k

به دست آوردن فوریه:

$$a_k = \frac{1}{T.} \int_{<T.>} x(t).e^{-jkw.t}\,dt$$

به دست آوردن خود تابع:

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k . e^{+jkw.t}$$

ابتدا با بســط دادن رابطه‌ی "a_k" در این درس می‌خواهیم ببینیم آیا این رابطه ارتباطی با رابطه‌ی ^{a}k ریاضــی مهندسی دارد یا خیر؟

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+1} a_k . e^{+jkw.t} + a. + \sum_{k=1}^{+\infty} a_k . e^{+jkw.t}$$

شکستن k از ∞- تا ∞+ بصورت فوق

$k \rightarrow -k$

$$a. + \sum_{k=1}^{+\infty} (a_k . e^{+jkw.t} \ + \ a_{-k} . e^{-jkw.t}) \ =$$

$$a. + \sum_{k=1}^{+\infty} \underbrace{(a_k + a_{-k}\,)}_{A_k} \cos(kw.t) + j \underbrace{(a_k - a_{-k})}_{B_k} \sin(kw.t)$$

همان ضرایب
در ریاضی مهندسی

می دانیم: $e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\ sin\theta$

$$a_k = \frac{1}{T.} \int_{<T.>} x(t)[\cos(k\,\omega.t) - j\sin(k\,\omega.t)]dt =$$

$$= \frac{1}{T.} \int_{<T.>} x(t)\cos(k\,\omega.t)dt \ - j[\ \frac{1}{T.} \int_{<T.>} x(t)\sin(k\,\omega.t)]\ \ dt$$

$$a_k = \frac{1}{T.} \int_{<T.>} x(t). e^{-jkw.t}\, dt \quad \begin{cases} a_0 \quad k=0 \\ a_k \\ a_{-k} \end{cases}$$

مثال:

$X(t)= 1+ \cos(2\pi t)$

به فرض: $T_.=1$ $T_.=1$

یادآوری: اعداد ثابت دوره تناوب اصلی ندارند ولی با هر عددی متناوب‌اند.

حل انتگرال فوق کاری بس مشکل است پس ما از روش معکوس بهره می‌گیریم که در توابع مثلثاتی کاربرد دارد.

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k . e^{+jkw.t}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k . e^{+jkw.t} = \cdots + a_{-2}. e^{-4j\pi t} +$$

$$+ a_{-1}. e^{-2j\pi t} + a_. + a_{+1}. e^{+2j\pi t} + \ldots \Rightarrow \quad a_0=1 \quad a_1=\tfrac{1}{2} \quad a_{-1}=\tfrac{1}{2} \quad a_k=0\ (k=else)$$

مثال:

$X(t)= 2+3\sin(3\pi t) + 4\cos(5\pi t) + 2\sin(2\pi t)$

$T=\frac{2}{3}$ $\quad T=\frac{2}{5}$ $\quad T=1 \rightarrow \omega_. = \pi \rightarrow T_.=2$

نکته: در جایی که سینوس یا کسینوس بصورت ضربی، توانی و یا ... باشد، $a_.$ برابر عدد ثابت موجود می‌باشد.

یعنی در اینجا $a_.=2$ می‌باشد.

روش حل: وقتی می‌خواهیم ضرایب سری فوریه را بسازیم طبق فرمول داریم: $k=1$ قرار می‌دهیم می‌شود.

یا به عبارت بهتر a_1 در کنار $w(1)$ می‌نشیند. پس طبق این توضیح دراین مثال $a_{\pm1}$ نداریم چون $w(1)$ نداریم. اما $a_{\pm2}$ ، $a_{\pm3}$ و $a_{\pm5}$ را داریم چون ω های آن در سوال موجود است.

$$\sin\theta = \frac{e^{j\theta}-e^{-j\theta}}{2j} \qquad \cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$

$a_0=2 \quad a_2=\frac{2}{2j} \quad a_{-2}= -\frac{2}{2j} \quad a_3=\frac{3}{2j} \quad a_{-3}= -\frac{3}{2j} \quad a_5=a_{-5}=\frac{4}{2}$

مثال:

$X(t)= 1 + \cos^2(3\pi t) - \sin^2(2\pi t)$

ساده سازی توان

$$X(t)= 1+\frac{1+\cos(6\pi t)}{2}-\frac{1-\cos(4\pi t)}{2}= \underbrace{1+\frac{1}{2}\cos(6\pi t)+\frac{1}{2}\cos(4\pi t)}_{\omega_0 = 2\pi \rightarrow T_0=1}$$

$$\begin{cases} a_0=1 \\ a_2= a_{-2} = \frac{1}{4} \\ a_3= a_{-3} = \frac{1}{4} \end{cases}$$

نکته کلی:

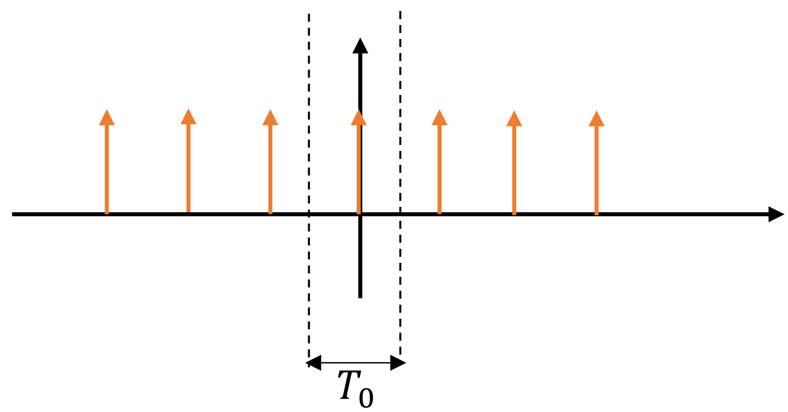
$$A\cos(r\omega_0 t+\phi) \rightarrow \begin{cases} a_r = \frac{A}{2}e^{j\varphi} \\ a_{-r} = \frac{A}{2}e^{-j\varphi} \end{cases}$$

$$A\sin(r\omega_0 t+\phi) \rightarrow \begin{cases} a_r = \frac{A}{2j}e^{j\varphi} \\ a_{-r} = -\frac{A}{2j}e^{-j\varphi} \end{cases}$$

$$a_{-r}= a_r^*$$

مثال: قطار ضربه

$$1)\,x(t)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(t-kT_0)$$



دوره تناوبی را انتخاب کردیم که کار ما آسان‌تر شود :

$$a_k=\frac{1}{T_0}\underbrace{\int_{-\frac{T_0}{2}}^{\frac{T_0}{2}}\delta(t)e^{-jk\omega_0 t}\,dt}_{\delta(t)}=\frac{1}{T_0}$$

$$2)\,x(t)=5\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(3t-2k)=5\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[3\left(t-\frac{2}{3}k\right)]=\frac{5}{3}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta\left(t-\frac{2}{3}k\right)$$

ضریب

$$\longrightarrow T_0=\frac{2}{3}\longrightarrow a_k=\frac{5}{3}\times\frac{1}{\frac{2}{3}}=\frac{5}{2}$$

$$3)\,x(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t^2-kt)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[t(t-k)]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(t)}{k}+\frac{\delta(t-k)}{k}\longrightarrow$$

متناوب نیست پس ضرایب سری فوریه نیز ندارد

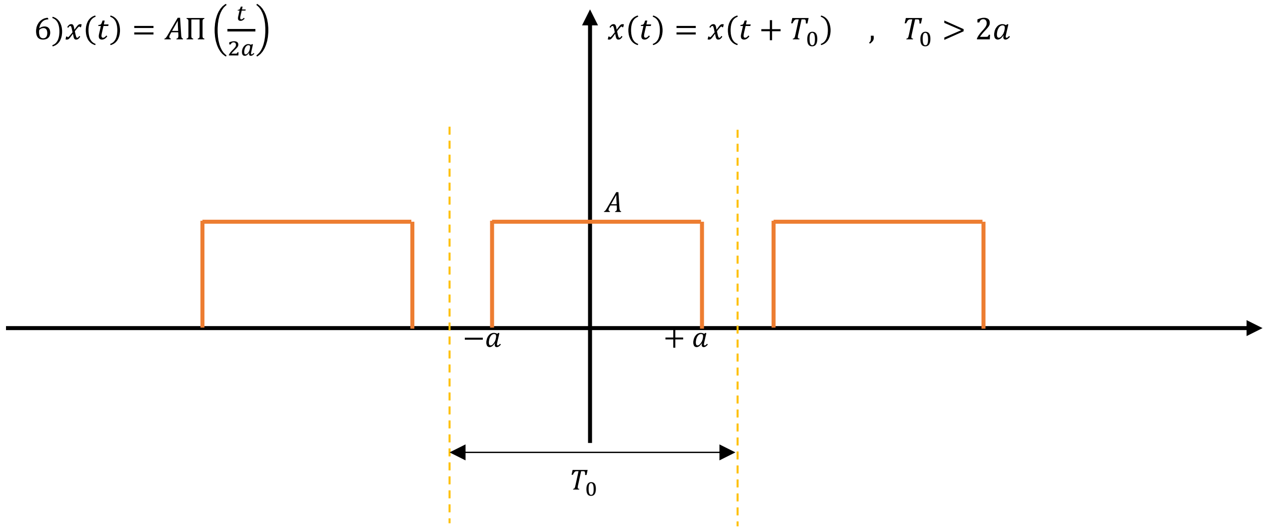
$$4)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(\left[t-\frac{k}{2}\right])^2$$

متناوب نیست بدلیل وجود $\delta(t^2)$ پس ضرایب سری فوریه ندارد

$$5)\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta[(t-2k)(t-3k)]=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{\delta(t-2k)}{k}+\frac{\delta(t-3k)}{k}=\frac{1}{k}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\delta(t-2k)+\delta(t-3k)=\frac{1}{6k}$$

متناوب نیست

$6)\ x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{2a}\right)$ $\qquad x(t) = x(t+T_0) \quad , \quad T_0 > 2a$



$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{-a}^{a} Ae^{-jk\omega_0 t}\,dt = \frac{A}{T_0}.\frac{e^{-jk\omega_0 t}}{-jk\omega_0 t}\Bigg|_{-a}^{a} = \frac{A}{T_0}.\frac{1}{jk\omega_0}[e^{+jk\omega_0 a} + e^{-jk\omega_0 a}]$$

$$\Rightarrow a_k = \frac{2A}{T_0 k\omega_0}\sin(k\omega_0 a) = \frac{2A}{T_0.k.\frac{2\pi}{T_0}}\sin\left(\frac{2\pi}{T_0}.k.a\right) = \frac{2a.A}{T_0}sinc\left(\frac{2ka}{T_0}\right)$$

فرمول کلی تر : $x(t) = A\Pi\left(\frac{t}{2a}\right) \quad , \quad T_0 \quad \longrightarrow \quad a_k = \frac{\text{مساحت}}{T_0}.sinc\left(\frac{k}{T_0}.\text{طول}\right)$

خصوصیات ضرایب سری فوریه :

۱- خطی بودن:

$x(t) \xrightarrow{T_x} a_k \quad , \quad y(t) \xrightarrow{T_y} b_k$

$Ax(t) \longrightarrow Aa_k$ همگنی :

$x(t) \xrightarrow{T_x} a_k \quad , \quad y(t) \xrightarrow{T_y} b_k$

$z(t) = \underset{<T_x>}{x(t)} + \underset{<T_x>}{y(t)} \xrightarrow{c_k}$ خاصیت جمع پذیری

بررسی خاصیت جمع پذیر:

$$if\ T_x = T_y \quad \longrightarrow\ z(t) \xrightarrow{T_x} c_k = a_k + b_k$$

$$c_k = \frac{1}{T_x}\int_{<T_x>} \big(x(t)+y(t)\big)e^{-jk\omega_x t}dt = a_k + b_k = c_k$$ خاصیت جمع پذیری دارد

$$if\ \ T_x \neq\ T_y \quad \longrightarrow \quad T_{new} = \text{ک.م.م}\{T_x, T_y\}$$

$$c_k = \frac{1}{T_{new}}\int \big(x(t)+y(t)\big)e^{-jk\omega_x t}dt = a_{k_{(new)}} + b_{k_{(new)}}$$

بررسی خاصیت همگنی:

$$a_k = \frac{1}{T_x}\int x(t)e^{-jk\omega_x t}dt$$

$$c_k = \frac{1}{T_x}\int Ax(t)e^{-jk\omega_x t}dt = Aa_k$$ خاصیت همگنی وجود دارد

مثال:

$$\left.\begin{aligned} x(t) &= 1+\cos(\pi t) \quad \longrightarrow\ T_x = 2 \longrightarrow a_0, a_1, a_{-1} \\ y(t) &= \sin(\pi t) \qquad\ \longrightarrow\ T_y = 2\ \longrightarrow b_1, b_{-1} \\ z(t) &= 1+\cos(\pi t)+\sin(\pi t) \end{aligned}\right\} \quad c_k \rightarrow\ c_0, c_1, c_{-1}$$

$$x(t) = 1+\cos(\pi t) \quad \longrightarrow \quad T_x = 2 \longrightarrow\ a_0, a_1, a_{-1}$$

$$y(t) = \cos(2\pi t) \quad \longrightarrow \quad T_y = 1 \longrightarrow\ b_1, b_{-1}$$

$$T_{new} = \text{ک.م.م}\{1,2\} \quad \longrightarrow \quad \omega_{new} = \pi$$

$$\left.\begin{aligned} x(t) &=> a_{k_{(new)}} = a_0, a_1, a_{-1} \\ y(t) &=> b_{k_{(new)}} = b_2, b_{-2} \end{aligned}\right\} \quad c_k \rightarrow\ c_0, c_1, c_{-1}, c_2, c_{-2}$$

۲- خاصیت وارونگی زمانی :

$$x(t) \xrightarrow{T_0} a_k \quad , \quad x(-t) \xrightarrow{T_0} b_k$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$b_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(-t)e^{-jk\omega_0 t}dt \qquad -t = m \rightarrow t = -m \qquad dt = -dm$$

$$b_k = -\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(m)e^{-jk\omega_0(-m)}dm = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(m)e^{-j(-k)\omega_0 m}dm = a_{-k}$$

نتیجه: اگر سیگنالی در حوزه زمان زوج باشد ضرایب فوریه‌اش نسبت به k زوج می‌شود.

۳- خاصیت scaling یا تغییر مقیاس زمانی :

$$x(t) \xrightarrow{T_0} a_k \quad , \quad x(mt) \xrightarrow{?}$$

فرض ۱ : $0 < m <$ (انبساط زمانی)

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$b_k = \frac{1}{\frac{T_0}{m}}\int_{<\frac{T_0}{m}>} x(mt)e^{-jk\omega_0 mt}dt = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(r)e^{-jk\omega_0 r}dr = a_k$$

$$\left[\begin{array}{l} mt = r \rightarrow dt = \frac{1}{m}dr \\ r\Big|_0^{T_0} \quad , \quad m\omega_0 \rightarrow \omega_0 \end{array}\right.$$

نکته: از فرض $0 < m < 1$، فقط فرض مثبت بودن را استفاده کردیم.

نکته مهم:

$$x(mt) \dashrightarrow b_k \dashrightarrow T_0 \qquad \frac{T_0}{|m|} \qquad \xrightarrow{0 < m < 1}$$

$$x(mt) \dashrightarrow b_k \dashrightarrow T_0 \qquad \frac{T_0}{|m|} \qquad \xrightarrow{m > 1}$$

چون اگر سیگنالی با $\frac{T_0}{2}$ متناوب باشد با T_0 نیز متناوب خواهد بود.

در این صورت b_k بصورت زیر قابل محاسبه است :

$$b_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(mt)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$= \frac{1}{T_0}\int_{<mT_0>} x(r)e^{-jk\omega_0\frac{r}{m}}\frac{dr}{m} = \frac{1}{mT_0}\int_{<mT_0>} x(r)e^{-j(\frac{k}{r})\omega_0 r}dr = \frac{1}{m}a_{\frac{k}{m}}$$

$$\begin{cases} mt = r \quad \rightarrow \quad dt = \frac{1}{m}dr \\ if \quad t \Big|_0^{T_0} \quad \rightarrow \quad r \Big|_0^{mT_0} \end{cases}$$

۴- خاصیت شیفت در زمان :

$$x(t) \xrightarrow{T_0} a_k \qquad , \qquad x(t-t_0) \xrightarrow{T_0} b_k$$

$$a_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t)e^{-jk\omega_0 t}dt$$

$$b_k = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(t-t_0)e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} x(m)e^{-jk\omega_0(m+t_0)}dm = e^{-jk\omega_0 t_0}a_k$$

$$\begin{cases} t - t_0 = m \quad \rightarrow \quad dt = dm \\ if \quad t \Big|_0^{T_0} \quad \rightarrow \quad m \Big|_0^{T_0} \end{cases}$$

۵- خاصیت شیفت در حوزه فرکانس :

$$x(t) \xrightarrow{T_0} a_k \qquad , \qquad y(t) \xleftarrow{T_0\ \text{فرض}} a_{k-m}$$

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_k\, e^{+jk\omega_0 t} \quad , \qquad y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{k-m}\, e^{+jk\omega_0 t}$$

$$k - m = r \;\; --\!\!\to \;\; y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_r\, e^{+j(r+m)\omega_0 t} = e^{+jm\omega_0 t} x(t)$$

با T_0 متناوب است پس فرضمان را اثبات کردیم.

۶- کانولوشن در حوزه زمان :

$$x(t) \xrightarrow{T_x} a_k \qquad , \qquad h(t) \xrightarrow{T_h} b_k$$

$$y(t) = x(t) * h(t) \;\; --\!\!\to \;\; c_k$$

فرض ۱ :

$$T_x = T_h = T_0 \;\; --\!\!\to \;\; c_k = T_0 a_k b_k$$

فرض ۲ :

$$\mathrm{T_x} \neq \mathrm{T_h} \;\; \to \;\; T_0 = \text{ک. م. م} \{T_x, T_h\} \quad => \quad a_{k_{(new)}}, b_{k_{(new)}} --\!\!\to \; T_0$$

$$--\!\!\to c_k = T_0 a_{k_{(new)}} b_{k_{(new)}}$$

۷- اتحاد پارسوال:

$$x(t) \xrightarrow{T_0} a_k$$

$$\text{توان یک سیگنال متناوب} = \frac{1}{T_0} \int_{<T_0>} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

جمع بندی خواص سری فوریه :

۱- خطی بودن:

$$x(t) \dashrightarrow T_x \dashrightarrow a_k$$
$$y(t) \dashrightarrow T_y \dashrightarrow b_k$$
$$Ax(t)+By(t) \dashrightarrow T_0 \dashrightarrow Aa_k+Bb_k \quad , \qquad T_0 = \text{ک.م.م}\{T_x, T_y\}$$

۲- وارونگی زمانی :

$$x(-t) \dashrightarrow T_x \dashrightarrow a_{-k}$$

۳- تغییر مقیاس زمانی :

$$x(at) \dashrightarrow \frac{T_x}{|a|} \dashrightarrow a_k$$

۴- شیفت در حوزه زمان :

$$x(t-t_0) \dashrightarrow T_x \dashrightarrow e^{-jk\omega_0 t_0}.\,a_k$$

۵- شیفت در حوزه فرکانس :

$$e^{+jk_0\omega_0 t}.\,x(t) \to T_x \to a_{k-k_0}$$

۶- مشتق در حوزه زمان :

$$\frac{d}{dt}x(t) \dashrightarrow T_x \dashrightarrow (jk\omega_0)a_k$$

۷- کانولوشن در حوزه زمان:

$$x(t)*y(t) \dashrightarrow T_0 \dashrightarrow T_0.\,a_k.\,b_k$$

۸- اتحاد پارسوال:

$$\frac{1}{T_0}\int_{<T_0>}|x(t)|^2dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty}|a_k|^2$$

سوال: اگر سیگنالی نه زوج و نه فرد با دوره تناوب T_0 و ضریب سری فوریه a_k

داشته باشیم :

الف) دوره تناوب قسمت **زوج** این سیگنال : T_0

ب) دوره تناوب قسمت **فرد** این سیگنال : T_0

ج) ضرایب سری فوریه قسمت زوج و قسمت فرد : $\frac{a_k+a_{-k}}{2}$, $\frac{a_k-a_{-k}}{2}$

۹- ضرب در حوزه زمان:

$$x(t).y(t) \dashrightarrow T_0 \dashrightarrow a_k * b_k$$

$$z(t) = x(t).y(t) \qquad c_k = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} a_l . b_{k-l}$$

$$x(t) = x(t+T_x) = x(t+T_0)$$

$$y(t) = y(t+T_x) = y(t+T_0) \qquad T_0 = \text{ک. م. م}\{T_x, T_y\}$$

$$z(t) = z(t+T_x) \quad => \quad T_z = T_0$$

۱۰- مزدوج زمان:

$$x(t) \dashrightarrow T_x \dashrightarrow a_k$$

$$x^*(t) \dashrightarrow T_x \dashrightarrow ?$$

$$x(t) = r(t)e^{+j\theta(t)}$$

$$a_k = \frac{1}{T_x}\int_{<T_x>} r(t)e^{+j\theta(t)}e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_x}\int_{<T_x>} r(t)e^{j(\theta(t)-k\omega_0 t)}dt$$

$$x^*(t) = r(t)e^{-j\theta(t)}$$

$$b_k = \frac{1}{T_x}\int_{<T_x>} r(t)e^{-j\theta(t)}e^{-jk\omega_0 t}dt = \frac{1}{T_x}\int_{<T_x>} r(t)e^{-j(\theta(t)+k\omega_0 t)}dt = {a^*}_{-k}$$

۱۱- انتگرال در حوزه زمان:

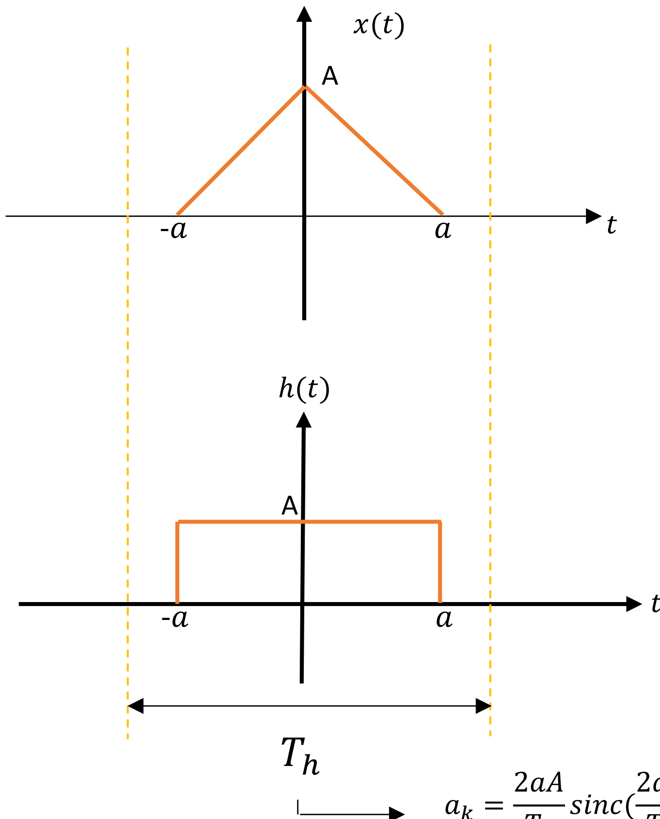
$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \dashrightarrow T_x \dashrightarrow \frac{1}{jk\omega_0}a_k$$

۱۲- سیگنال حقیقی و مختلط $x(t)$:

$F.S\{$سیگنال حقیقی و زوج$\} \dashrightarrow$ حقیقی و زوج

$F.S\{$سیگنال حقیقی و فرد$\} \dashrightarrow$ ضرایب موهومی محض و فرد

$$x(t) \dashrightarrow \text{حقيقي} \quad \left[\begin{array}{l} a_k = {a^*}_{-k} \\ Re\{a_k\} = Re\{a_{-k}\} \\ Im\{a_k\} = -Im\{a_{-k}\} \\ |a_k| = |a_{-k}| \\ \measuredangle a_k = -\measuredangle\, a_{-k} \end{array}\right.$$



$$a_k = \frac{2aA}{T_h} sinc(\frac{2ak}{T_h})$$

$$\underbrace{\Pi(t)}_{a_k} * \underbrace{\Pi(t)}_{a_k} = \Lambda(t)$$

$$a_k \,.\, a_k = {a_k}^2 = c_k$$

$$=> P_\infty = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^4$$

$$P_\infty = \frac{1}{T_h}\int_{-a}^{+a} A^2 dt = \frac{2aA^2}{T_h}$$

$$P_\infty = \frac{1}{T_h}\int_{<T_h>} |x(t)|^2 dt = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} |a_k|^2$$

Lecture 05

سوال: حاصل سری زیر را بدست آورید.(راهنمایی: از سری فوریه $e^{\frac{x}{2\pi}}$ در فاصله $-\pi$ تا π استفاده کنید).

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2\pi k)^2+1}$$

حل: چون بازه های سری فوریه از منفی بینهایت تا مثبت بینهایت هست ابتدا بازه ها تغییر میدهیم:

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2\pi k)^2+1}=\frac{1}{2}\Big(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{(2\pi k)^2+1}+\sum_{k=-\infty}^{-1}\frac{1}{(2\pi k)^2+1}\Big)=\frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2k\pi)^2+1}-1}{2}$$

حال کافیست مقدار سری $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(2k\pi)^2+1}$ را محاسبه کنیم.

ابتدا سری فوریه $e^{x/2\pi}$ را محاسبه میکنیم:

$$C_k=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{\frac{x}{2\pi}}\cdot e^{-kxj}dx=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{\left(\frac{1}{2\pi}-kj\right)x}dx=\frac{1}{2\pi(\frac{1}{2\pi}-kj)}\left[e^{\left(\frac{1}{2\pi}-kj\right)x}\right]_{-\pi}^{+\pi}$$

$$C_k=\frac{1}{1-2k\pi j}\left[e^{\left(\frac{1}{2}-k\pi j\right)}-e^{\left(-\frac{1}{2}+k\pi j\right)}\right]=\frac{(-1)^k}{1-2k\pi j}\left[e^{\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}\right]$$

پس ضرایب سری فوریه تابع مورد نظر به صورت زیر شد:

$$C_k = \frac{(-1)^k}{1-2\pi kj}\left[e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}\right]$$

اگر از رابطه پارسوال استفاده کنیم خواهیم داشت :

$$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} |a_k|^2 = \frac{1}{T_0}\int_{<T_0>} |x(t)|^2$$

$$\Rightarrow \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \left|\frac{(-1)^k}{1-2\pi kj}\left(e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}\right)\right|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{x}{\pi}}\,dx \;\Rightarrow\; \sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{\left(e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}}\right)^2}{1+(2\pi k)^2} = \frac{1}{2}(e^{1}-e^{-1})$$

$$\sum_{k=-\infty}^{k=\infty} \frac{1}{1+(2\pi k)^2} = \frac{1}{2}\left(\frac{e^{1}-e^{-1}}{(e^{\frac{1}{2}} - e^{-\frac{1}{2}})^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{\sinh(1)}{sinh^2(\frac{1}{2})}\right) = \frac{1}{2}coth(\frac{1}{2})$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{(1+(2\pi k)^2)} = \frac{1}{4}coth\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$