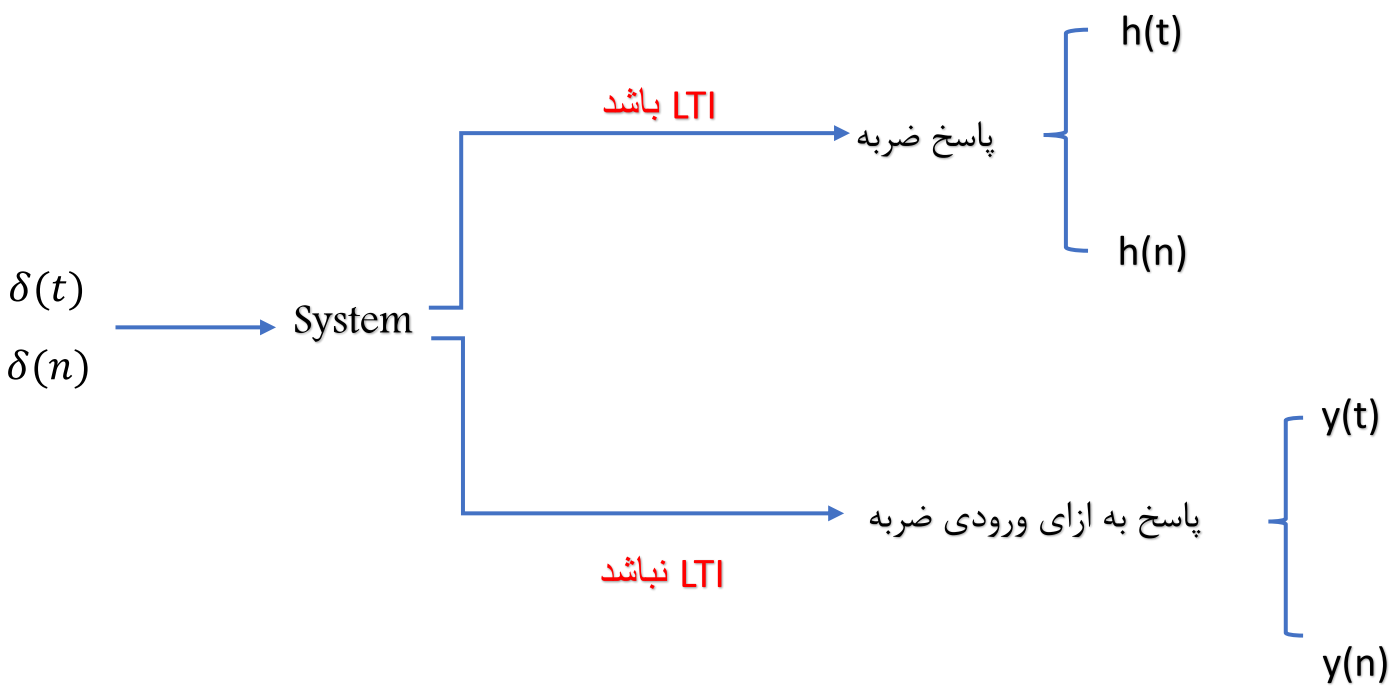
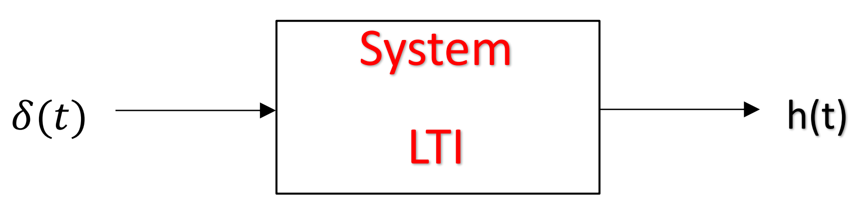
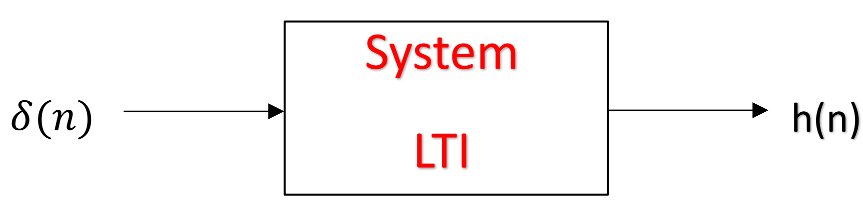
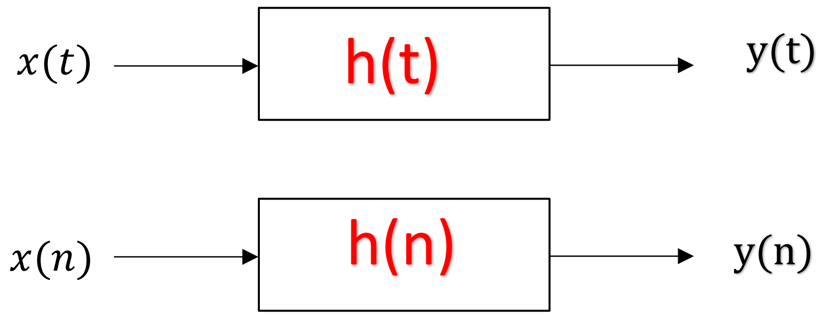
# فصل دوم : سیستم های LTI ، جمع و انتگرال کانولوشن



در بلوک به نمایندی از خود سیستم پاسخ ضربه ی آن را میگذاریم:




**خواص سیستم های LTI از روی پاسخ ضربه:**

h(t):

- علّیت → $h(t)=0 \qquad t<0$
- حافظه داری → $h(t)\neq k\delta(t)$
- پایداری → $\int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|\, dt \ < \ M$
- وارون پذیری → $h(t) * h(t)^{inv}=\delta(t)$

h(n)

- علّیت → $h(n)=0 \quad n<0 \quad \text{or} \quad n\leq -1$
- حافظه داری → $h(n)\neq k\delta(n)$
- پایداری → $\sum_{-\infty}^{+\infty}|h(n)| \quad < \quad M$
- وارون پذیری → $h(n)^{*}\, h(n)^{inv}=\delta(n)$

استدلال علّی بودن: تابع ورودی تازه در $t=0$ اعمال میشود و مقداری در t های منفی ندارد پس h(t) باید صفر باشد.« منظور از تابع همان ضربه است»

استدلال حافظه دار بودن: تابع ضربه در $t=0$ مقدار دارد و به ازای t های دیگر صفر است و ما میدانیم یک تابع برای آنکه حافظه دار باشد باید علاوه بر زمان حال به زمان گذشته یا آینده وابسته باشد و تابع ضربه این شرط را ارضا نمی کند.

استدلال پایداری: سطح زیر منحنی تابع ضربه محدود است، اگر زیر نمودار پاسخ هم محدود بود پس پایداری برقرار است.

استدلال وارون پذیری: در مورد استدلال وارون پذیری در فصل های بعد بحث خواهیم کرد.

$$x(t) \rightarrow \boxed{h(t)} \xrightarrow{w(t)} \boxed{h_i(t)} \rightarrow y(t)$$

$$h[n]*h_{inv}[n]=\delta[n] \qquad h(t)*h_{inv}(t)=\delta(t)$$

سوال بسیار مهم : اگر به جای ورودی ضربه ورودی پله به یک سیستم بدهیم و متنا سباً پا سخ پله تحویل بگیریم چگونه میتوانیم آن چهار خاصیت را اثبات کنیم؟ ( دقت کنید که در این حالت، گسسته و پیوسته روابط یکسانی نخواهند داشت ) برای اثبات میتوانید از روابط زیر استفاده کنید.

$$s[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} h[k] \qquad h[n]=s[n]-s[n-1]$$

$$s(t)=\int_{-\infty}^{t} h(\tau)d\tau \qquad h(t)=\frac{ds(t)}{dt}=s'(t)$$

کانولووشن در سیستم های LTI:

$$X(t) \longrightarrow \boxed{h(t)} \longrightarrow y(t)$$

خاصیت جابجایی:

$$y(t) = x(t) * h(t) = h(t) * x(t)$$

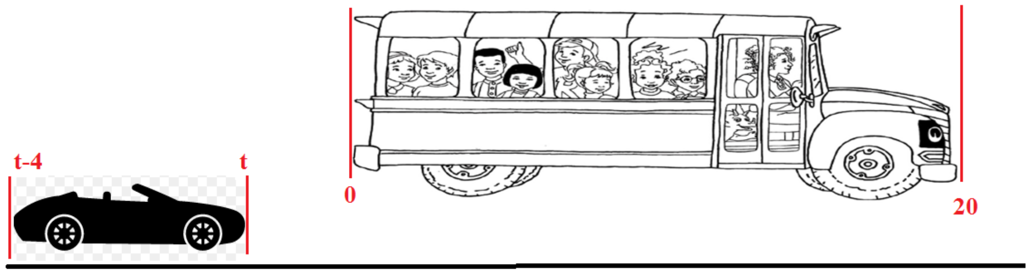
$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t-\tau)x(\tau)d\tau$$

$$X1(t) * h(t) * X(t) = X1(t) * X(t) * h(t)$$

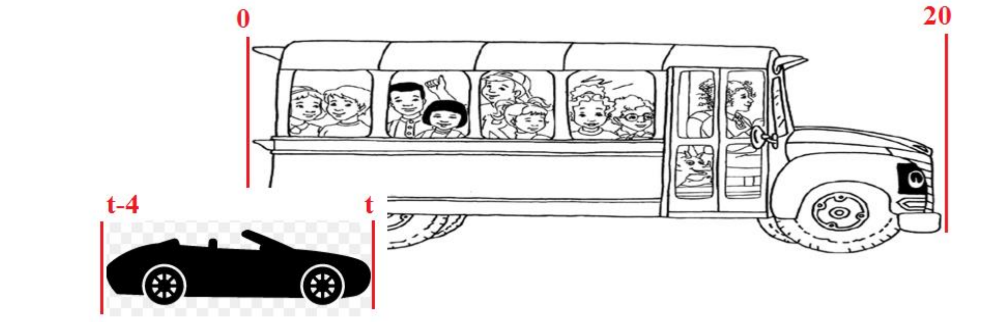
خاصیت توزیع پذیری:

$$X(t) * (h1(t) \pm h2(t)) = X(t) * h1(t) \pm X(t) * h2(t)$$

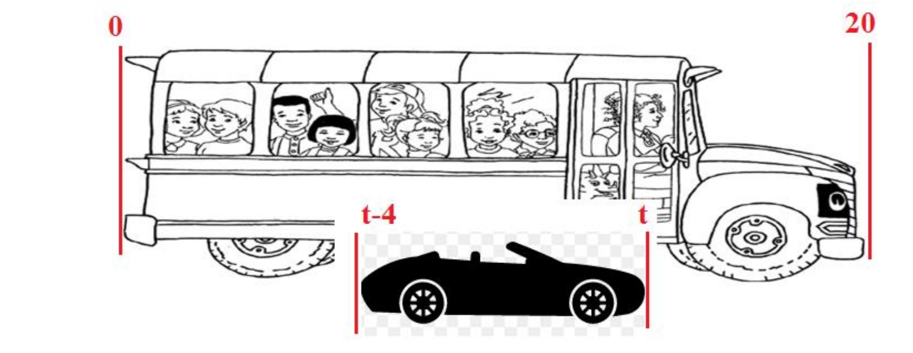
برای راحتی یادگیری کانولوشن آنرا به صورت سبقت دوماشین مدل میکنیم.




همپوشانی صفر → $t<0$ هنوز نرسیده است 1



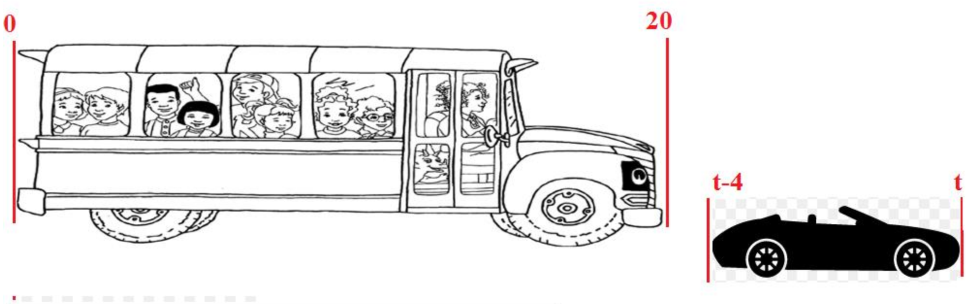

هم پوشانی $\Big|_{0}^{t}$ → $\begin{cases} t\geq 0 \\ t-4<0 \end{cases}$ لبه ی جلویی عبور کند ولی لبه ی عقبی نرسیده باشد 2




هم پوشانی $\Big|_{t-4}^{t}$ → $\begin{cases} t-4\geq 0 \\ t<20 \end{cases}$ لبه ی عقبی عبور کند ولی لبه ی جلویی هنوز نرسیده باشد 3


4 لبه ی جلویی عبور کرده باشد
ولی لبه ی عقبی هنوز نرسیده باشد

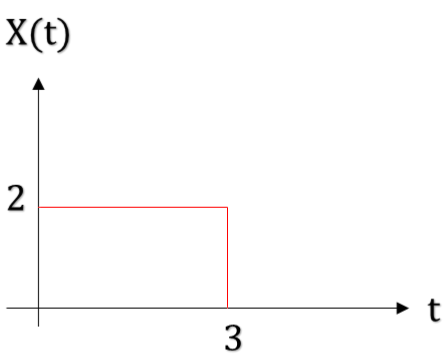
$$\left\{ \begin{array}{l} t-4 < 20 \\ t>20 \end{array} \right\} \rightarrow \Big|_{t-4}^{20} \quad \text{هم پوشانی}$$

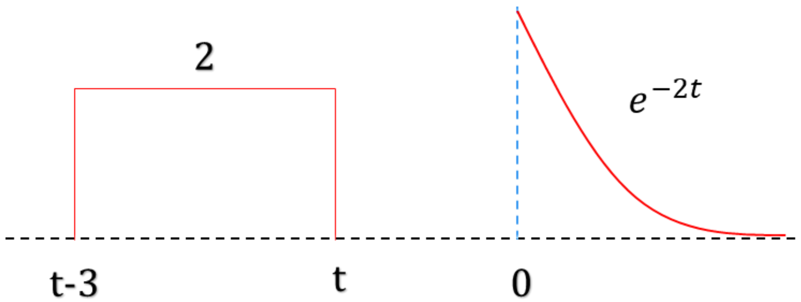



5 لبه ی عقبی عبور کرده باشد $t-4 \geq 20$ → همپوشانی صفر

مثالی برای درک بهتر:

$$h(t) = e^{-2t}\,u(t)$$






1 $t<0$ → همپوشانی صفر → $y(t)=0$

2 $t \geq 0$, $t-3<0$ → $\Big|_{0}^{t}$ هم پوشانی → $y(t)=\int_0^t 2e^{-2\tau}\,d\tau$

3 $t-3 \geq 0$ → $\Big|_{t-3}^{t}$ هم پوشانی → $y(t)=\int_{t-3}^{t} 2e^{-2\tau}\,d\tau$

$t-3 \geq 0$ ⇓ بازه

$\Big|_{t-3}^{t}$ ⇓ کران انتگرال

مراحل کانولوشن:

۱) یکی از سیگنال های ورودی یا پاسخ ضربه را انتخاب کنید و نسبت به محورها y قرینه کنید و لبه هارا با t جمع کنید.

۲) شکل قرینه شده شماره ۱ را پشت شکل سیگنال دیگر می کشیم و مراحل سبقت را با دقت تمام انجام می دهیم.

۳) همپوشانی هر مرحله را نوشته و در کران های انتگرال کانولوشن قرار می دهیم.

۴) متناسب با سیگنال وارون شده یکی از رابطه های کانولوشن را نوشته و کران های انتگرال را قرار داده، محاسبه کرده و ساده میکنیم.

نکته ۱: در نقاطی که بازه های زمانی t گسستگی دارد اید نتیجه y(t) پیوسته باشد.

نکته۲: روابط زیر برای حل کانولوشن و بررسی درستی نتیجه بسیار مفید میباشد:

1. $\text{Start}(x) + \text{Start}(h) \longrightarrow \text{Start}(y)$
2. $\text{End}(x) + \text{End}(h) \longrightarrow \text{End}(y)$
3. $S_x \cdot S_h = S_y$

نکته ۳:

۱. در برخی از سوالات از شما همه ی خروجی ها را میخواهند یعنی y(t) به ازای همه ی زمان ها

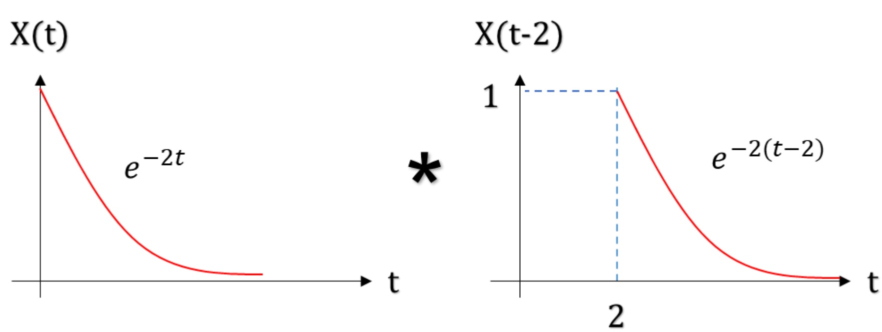
۲. در برخی ازسوالات از شما خروجی را در زمان خاصی می خواهند مثل t=3 که عموماً زمان همان زمان گسسته ی بین بازه هاست.

« فرقی ندارد از کدام یک محاسبه میکنیم پس ما از آنی حساب میکنیم که آسان تره»

۳. $y(t)$ چه زمانی ماکزیمم میشود: جایی که بیشترین هم پوشانی رو داریم رو پیدا می کنیم و t آن را پیدا میکنیم . مقدار $y(t)_{max}$ : بیشترین مساحتی که در همپوشانی اتفاق می افتد. *در مثال طرح شده در صفحه قبل بیشترین هم پوشانی را در t=3 داریم.

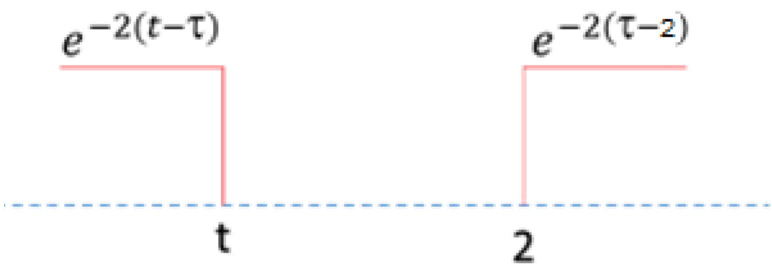
نکته ۴: اگر $x(t)$ یا $h(t)$ و یا هردو متناوب باشند حل در حوزه زمان مشکل خواهد بود. اینگونه سوالات را در فصل فوریه حل خواهیم کرد.

سوال: اگر $x(t) = e^{-2t}u(t)$ باشد خصوصیات سیستمی به فرم $y(t) = x(t) * x(t-2)$ را بیابید.




خصوصیات سیگنال ورودی : پیوسته – نه زوج نه فرد – غیرمتناوب – معین – حقیقی – انرژی

خصوصیات سیستم: پیوسته، خطی، تغییرناپذیر با زمان، علی، حافظه دار، وارون پذیر




1. $t<2 \longrightarrow y(t)=0$
2. $t\geq 2 \longrightarrow y(t)=\int_2^t e^{-2(t-\tau)}.\,e^{-2(\tau-2)}$

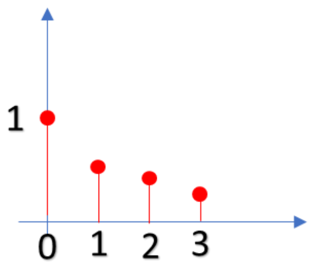
$$=\int_2^t e^{-2t}.e^{2\tau}.e^{-2\tau}.e^{+4} = e^{-2(t-2)}\int_2^t 1d\tau = (t-2).e^{-2(t-2)}$$

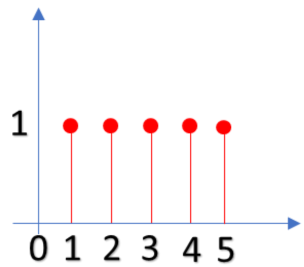
$$y(t)=\begin{cases} 0 & t<2 \\ (t-2).e^{-2(t-2)} & t\geq 2 \end{cases}$$

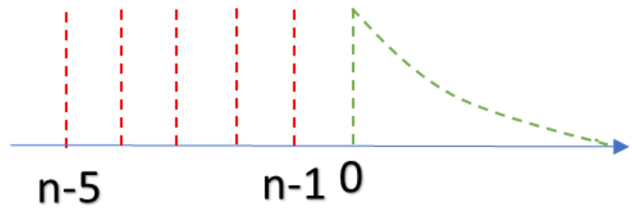
نکته۵: کانولوشن در دنیای گسسته دقیقاً همانند پیوسته می باشد با این تفاوت که جای انتگرال ها ، زیگما قرار می دهیم و به جای سطح زیر منحنی حا صل جمع مجموعه ها قرار داده می شود، سیگنال گ سسته در نقاط گسسته زمانی می توانند مقدار یکسانی نداشته باشند. « به جای t با n جمع می کنیم». نکته ۱ دنیای پیوسته در مورد دنیای گسسته برقرار نیست.

سوال: کانولوشن مقابل را بیابید.

$$y(n)=\left(\tfrac{1}{4}\right)^n u(n) * \left(u(n-1)-u(n-6)\right)$$




1. n-1<0 $\longrightarrow$ n<1 $\longrightarrow$ n≤0 $\longrightarrow$ y(n)=0

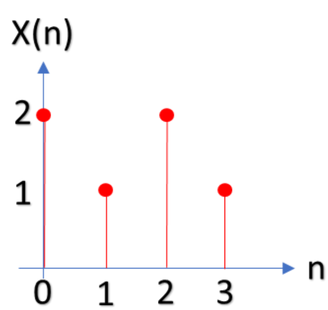
2. $\begin{cases} n-1\geq 0 \\ n-5<0 \end{cases} \longrightarrow 1\leq n\leq 5 \longrightarrow y(n)=\sum_{k=0}^{n-1} 1\times\left(\frac{1}{4}\right)^k$

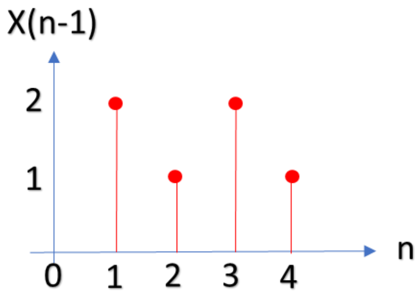
3. n-5≥0 $\longrightarrow$ n≥5 $\longrightarrow$ $y(n)=\sum_{k=n-5}^{n-1} 1\times\left(\frac{1}{4}\right)^k$

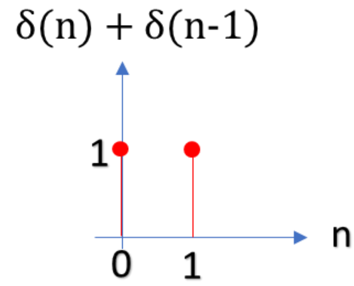
$y_{max}=?$ n=5 , $y_{max}=\sum_{k=0}^{4} 1\times\left(\frac{1}{4}\right)^k$

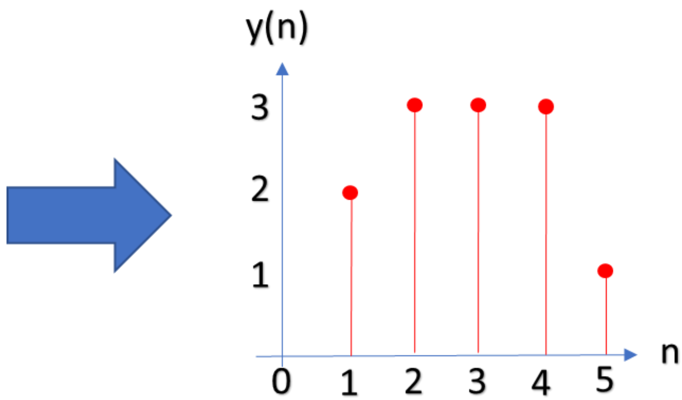
مثال: کانولوشن زیر را بیابید.

y(n)=x(n-1) * x(-2n+3)






$$y(n)=x(n-1) * x(-2n+3) = x(n-1)*[\ \delta(n) + \delta(n-1)\ ]$$

روش های نمایش یک سیستم:

A) رابطه ریاضی بین ورودی و خروجی:

۱. رابطه مستقیم $y(t)=\sin(\ x(t)\ )$

۲. رابطه دیفرانسیلی $y''+2y'-y=3x'+3x$

۳. رابطه تفاضلی $y(n-2)+3y(n)=3x(n-2)+x(n)$

B) پاسخ ضربه. برای سیستم های $h(n)\ ,\ h(t)$ : LTI

C) پاسخ به ازای ورودی ضربه. برای سیستم های غیر $y(n)\ ,\ y(t)$ : LTI

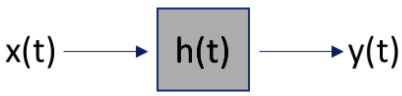
D) روش بلوک دیاگرام

E) رابطه (SFG) یا گراف گذر سیگنال

F) روش فضای حالت

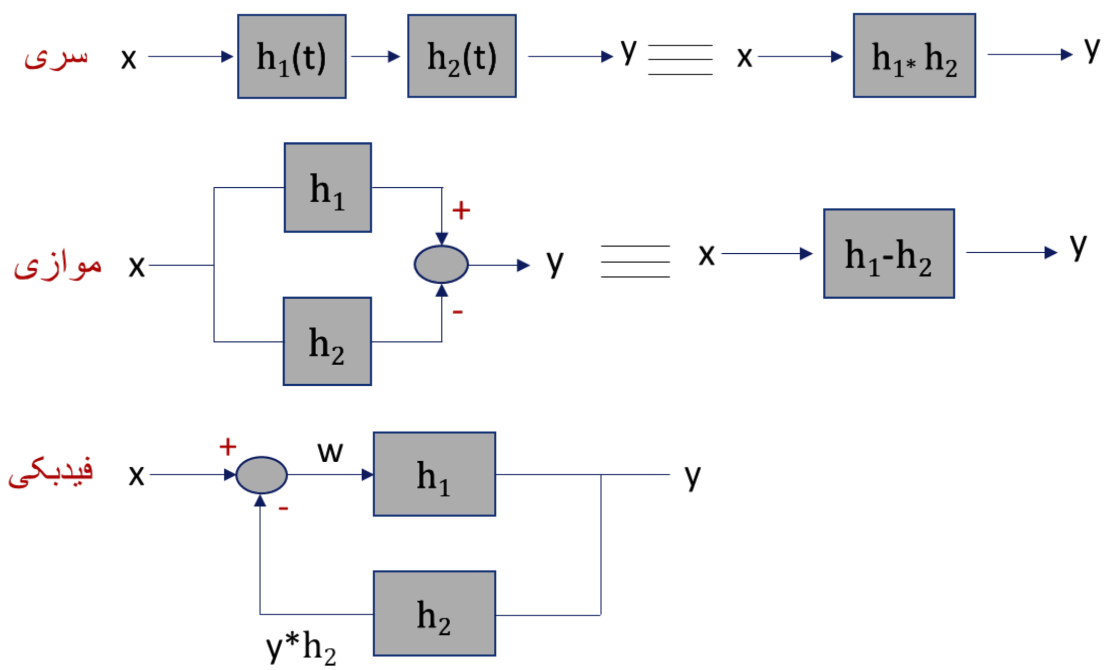
## روش بلوک دیاگرام

در این روش ورودی و خروجی های سیستمی و بلوک هایی که پاسخ ضربه برای هریک نوشته شده است به همراه جمع کننده ها و خطوط ارتباطی به هم وصل میشوند. رابطه مابین ورودی و خروجی هر بلوک رابطه کانولوشن می باشد.




$$y(t) = h(t) * x(t)$$

در شکل زیر بلوک دیاگرام مربوط به سیستم تر سیم شده است. بلوک دیاگرام ها در حالت کلی به سه شکل سری، موازی یا فیدبکی به هم متصل میشوند که در شکل های زیر نشان داه شده است. این شک از اتصالات مخصوصا بلوک دیاگرام فیدبکی در این درس کاربرد فراوانی دارد.




$$\left.\begin{aligned} w &= x - (y * h_2) \\ y &= h_1 * w \end{aligned}\right\}$$

$$y = h_1 * [x - (y * h_2)]$$

$$y * [\, \delta(t) + h_1 * h_2 \,] = h_1 * x$$

$$\frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s).H_2(s)}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\int_{-\infty}^{t} dt} \longrightarrow y(t) \qquad y(t) = \int_{-\infty}^{t} x(m)dm$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{\frac{d}{dt}} \longrightarrow y(t) \qquad y(t) = \frac{dx}{dt}$$

$$x(t) \longrightarrow \boxed{2} \longrightarrow y(t) \qquad y(t) = 2\,x(t)$$

$$x(n) \longrightarrow \boxed{D} \longrightarrow y(n) \qquad y(n) = x(n-1)$$

## روش گراف گذر سیگنال (SFG)

در این روش ورودی و خروجی های سیستمی و خط رابط جهت دار از ورودی به خروجی که پا سخ ضربه روی هر یک نو شته شده ا ست. در این روش جمع کننده ها و خطوط ارتباطی در نقاط اتصال به هم و صل میشوند. رابطه مابین ورودی و خروجی هر بلوک رابطه کانولوشن می باشد. این روش در درس کنترل خطی به طور کامل معرفی و استفاده خواهد شد.

$$x \xrightarrow{\;h\;} y$$

## روش فضای حالت

در این روش سیستم را با استفاده از متغییرهای حالت تعریف میکنند. جزئیات بیشتر در مورد این روش در درس کنترل خطی و کنترل مدرن داده خواهد شد.

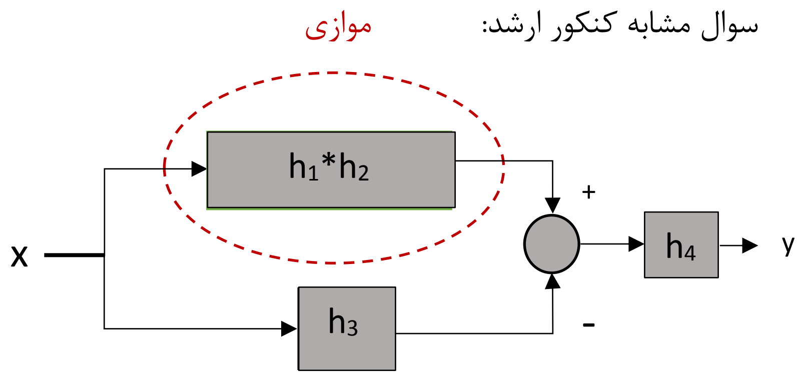
$$\begin{cases} X' = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases}$$

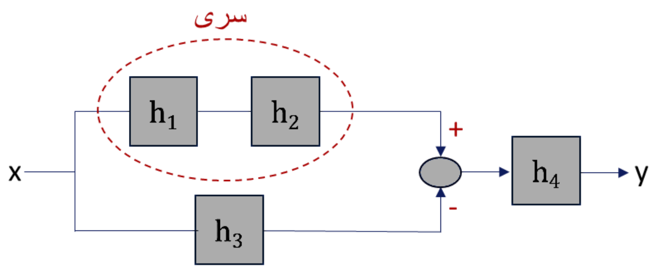
ورودی ← u

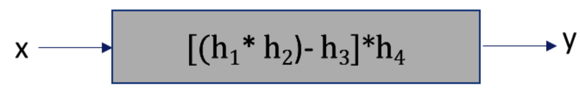
خروجی ← y

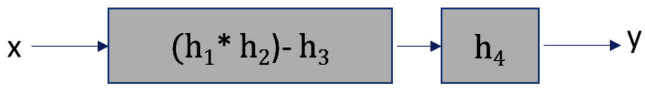
متغیر های حالت ← x

سوال مشابه کنکور ارشد:




اما نکته ای که در این سوال وجود داشت این بود که:

$h_3=h_2=u(n) – u(n-2)= \delta(n)+ \delta(n-1)$

$h_1= \delta(n)- \delta(n-1)$

$h_4= \delta(n)+ \delta(n+2)$

از جمله ی بلوک چهارم و ساده سازی داریم:

$[(h_1* h_2)- h_3]*h_4$ فاکتور گیری $h_2*[h_1 - \delta(n)]= h_2*( - \delta(n-1) )= -h_2(n-1)$

$-h_2(n-1)*h_4 =-h_2(n-1)*[ \delta(n)+ \delta(n+2)] = =-h_2(n-1) -h_2(n+1)= - [ \delta(n-1)+ \delta(n-2)] – [\delta (n+2)+ \delta (n+1)]=- \delta (n-1)- \delta (n-2)- \delta (n+2)- \delta (n+1)$

$\Rightarrow - \delta(n-2)- \delta(n-1)- \delta(n)- \delta(n+1)=-[(u(n+1)-u(n-2-1)]= -( u(n+1) – u(n-3) )$

نکته برای حل مثال بالا:

$\delta(n-k)+....+ \delta(n+a) \longrightarrow$

## ترسیم بلوک دیاگرام های سیستم های LTI

برای ترسیم بلوک دیاگرام برای سیستم های LTI گسسته بایستی معادله تفاضلی سیستم گسسته و معادله دیفرانسیلی سیستم پیوسته را داشته باشیم.

## ترسیم معادله تفاضلی سیستم گسسته

فرم کلی معادلات تفاضلی سیستم های گسسته به فرم زیر میباشد.

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y[n-k] = \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]$$

در حالت خاص فرض کنید معادله تفاضلی سیستم به فرم زیر باشد

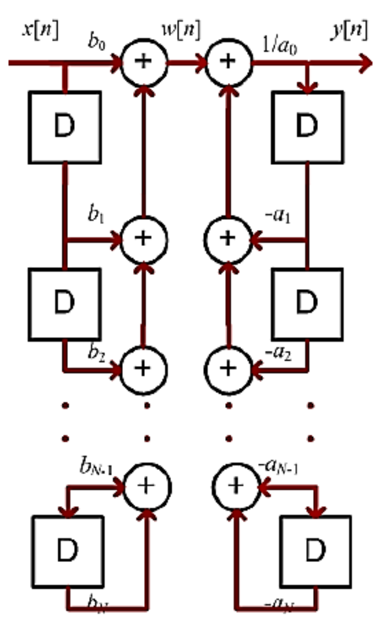
$$y[n] = \sum_{k=0}^{M} \frac{b_k}{a_0} x[n-k]$$

به این دسته از سیستم ها که پاسخ ضربه محدودی دارند سیستم هایی با پاسخ ضربه محدود (FIR) یا به عبارتی Finite Impulse Response گویند. سیستم هایی با پاسخ ضربه محدودی ندارند سیستم های (IIR) یا به عبارتی In-Finite Impulse Response گویند. برای ترسیم بلوک دیاگرام مربوط به معادلات تفاضلی به روال زیر انجام میدهیم.

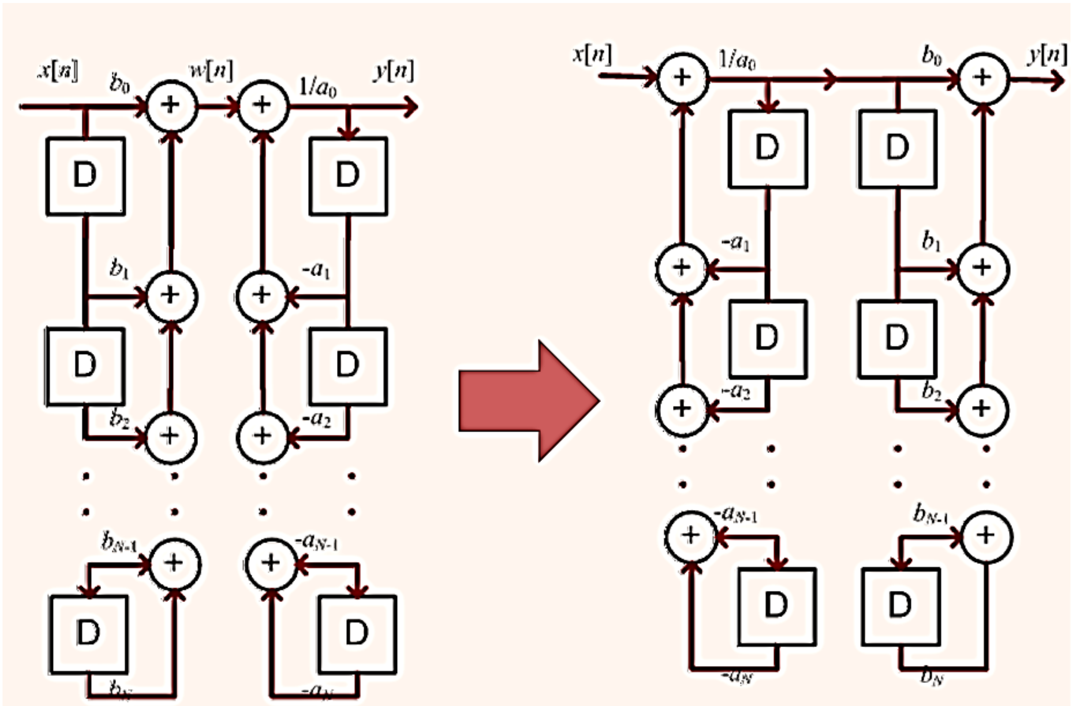
قدم اول: معادله را برحسب y(n) مرتب کنید.

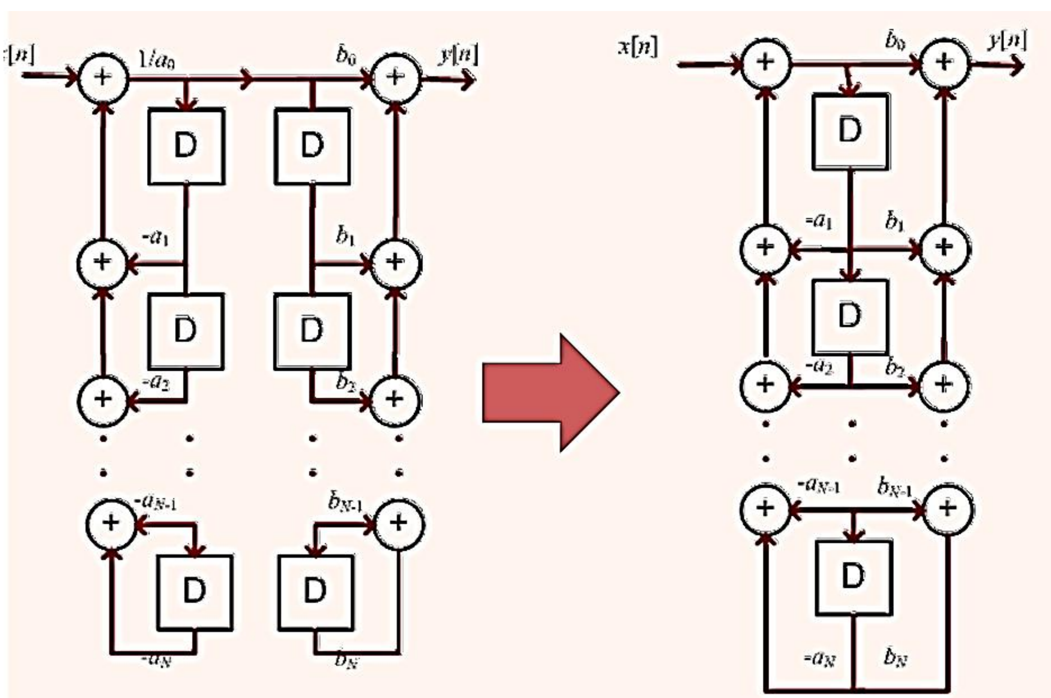
$$y[n] = \frac{1}{a_0}\left\{-\sum_{k=1}^{N} a_k y[n-k] + \sum_{k=0}^{M} b_k x[n-k]\right\}$$

قدم دوم: با استفاده از بلوک تاخیرو بلوک های جمع کننده معادله تفاضلی مربوطه را شبیه سازی نمایید.



قدم سوم: برای اینکه تعداد بلوک های تاخیر را حداقل کنیم به روال زیر عمل میکنیم.



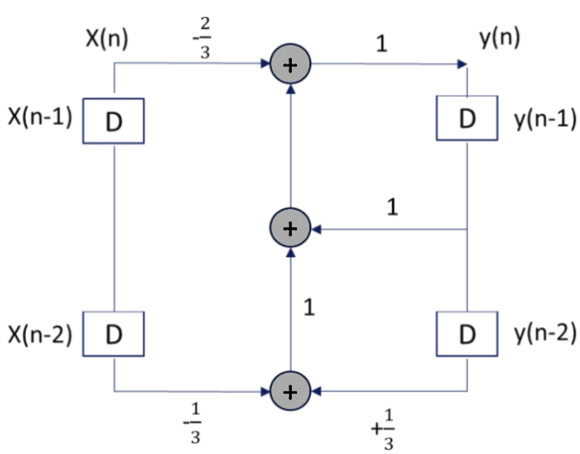
مثال:

$$y(n-2) + 3y(n-1) - 3y(n) = x(n-2) + 2x(n)$$

$$y(n) = -\frac{1}{3}\left( x(n-2) + 2x(n) - 3\,y(n-1) - y(n-2)\right)$$

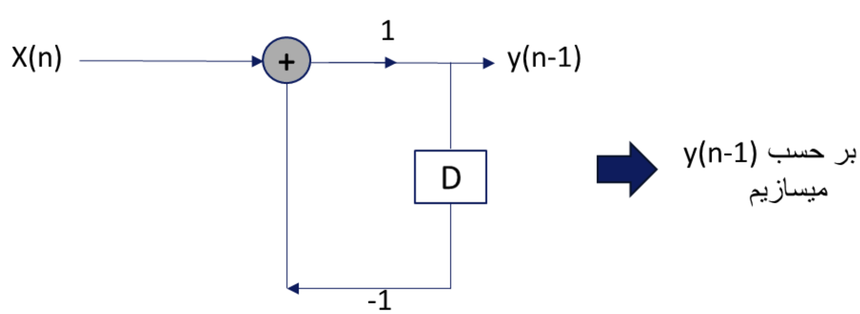
$$y(n) = -\frac{1}{3}x(n-2) - \frac{2}{3}\,x(n) + y(n-1) + \frac{1}{3}\,y(n-2)$$

اکنون یک نقطه را انتخاب میکنیم و به آن بلوک های تاخیر میدیم و متناسب با نیاز شکل نهایی را ترسیم میکنیم.




سوال: اگر y(n) نداشتیم چیکار کنیم؟ در این حالت ۲ راه حل داریم: تغییر متغیر – استفاده از متد مثال قبلی

$$y(n-1) = x(n) - y(n-2)$$

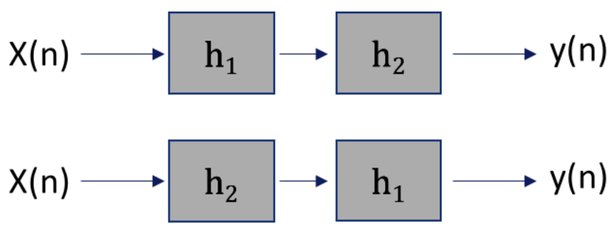


در حالت تغییر متغییر، بایستی تغییر متغییر به فرمی باشد که سیستم را به آینده مرتبط نکند.

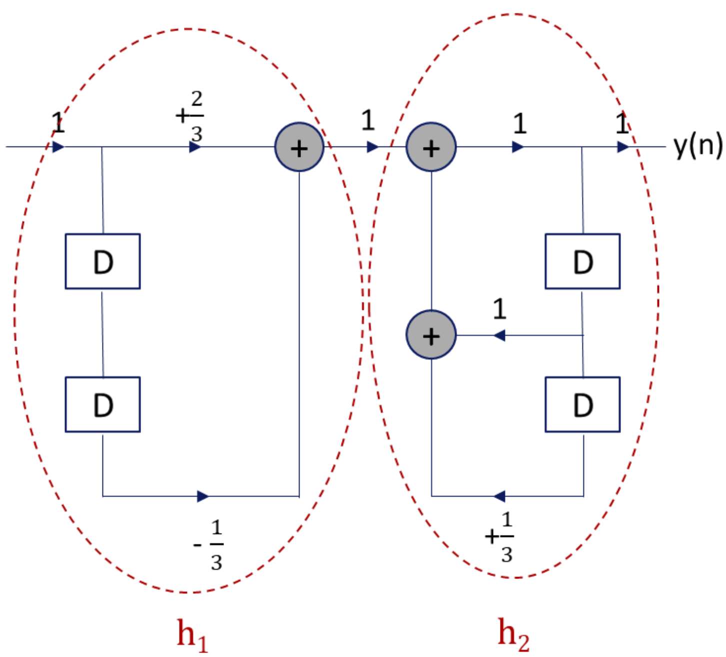
$$y(n-1)+y(n-2)=x(n) \xrightarrow[n \to n+1]{\text{تغییر متغیر}} y(n)+y(n-1)=x(n+1)$$

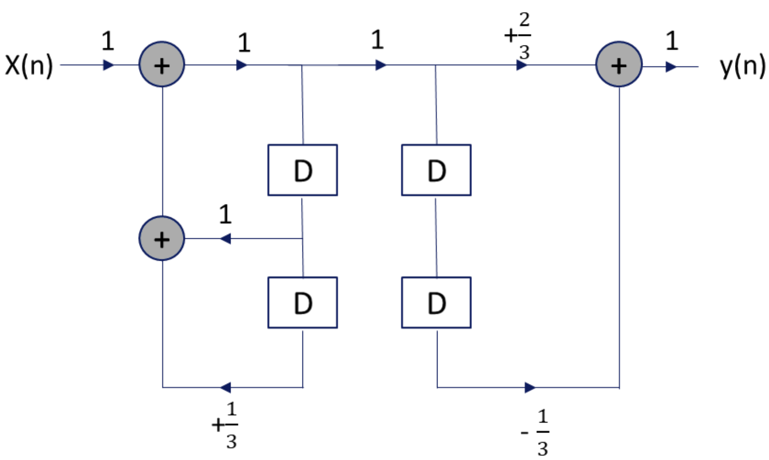
اما در اینجا مشکل این است که نمیتوانیم n+1 بسازیم.

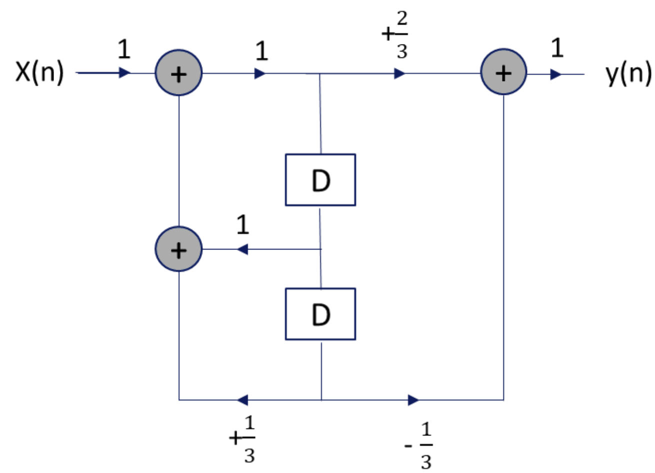
سوال: چیکار کنیم که بلوک های Delay ما کمتر شود؟




اکنون ADDER هارا جدا میکنیم.

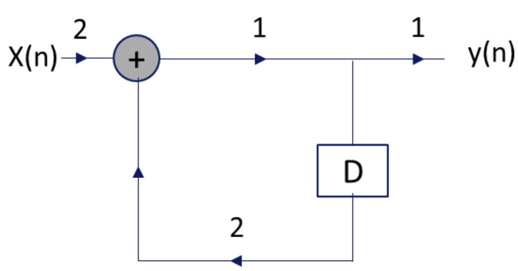





نکته: در اکثر سوالاتی که مطرح می شود روند حل مطابق این مثال نیست و باید برعکس عمل کنیم.

بلوک دیاگرام یک سیستم LTI علّی در زیر داده شده است.پاسخ به ازای ورودی $x(n)=\frac{1}{2}^{n} u(n)$ را بیابید.




$$y(n) = 2y(n-1) + 2x(n)$$

اکنون پاسخ ضربه را می یابیم و با داشتن ورودی، خروجی مورد نظر را می یابیم. به جای x(n)، $\delta(n)$ میگذاریم:

$h(n)=2h(n-1)+ 2\,\delta(n)$     h(n-1) صفر شد چون سیستم علّی است

$h(n)= 2\,\delta(n)$     یاد آوری: پاسخ ضربه به ازای n های منفی صفر است.

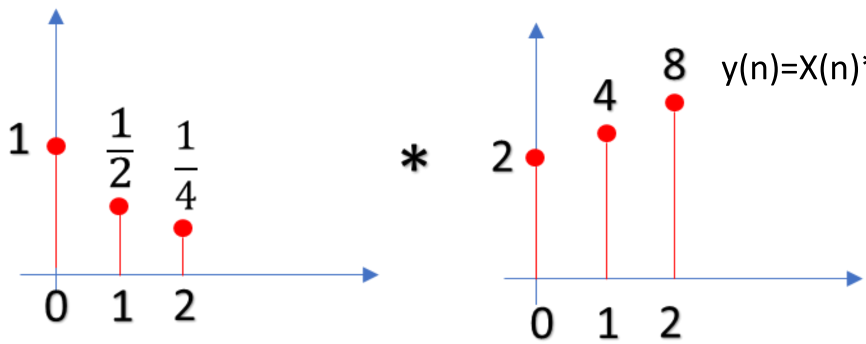
$y(n)= x(n)*h(n)=(\frac{1}{2}^{n} u(n)\ ) * 2\,\delta(n) = (\frac{1}{2})^{n-1} u(n)$

اما راه حل قبلی مشکل داشت چون h(n-1) فقط به ازای n=0 صفر است پس:

$h(n)=2h(n-1)+ 2\,\delta(n)$

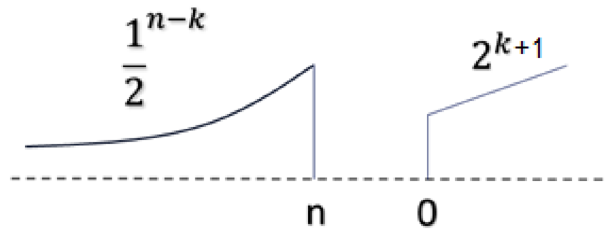
اکنون h(n) درست محاسبه شد .

$$\left.\begin{array}{lll} n=0 \longrightarrow & h(0)=2h(-1)+2 \longrightarrow & h(0)=2 \\ n=1 \longrightarrow & h(1)=2h(0)+0 \longrightarrow & h(1)=4 \\ n=2 \longrightarrow & h(2)=2h(1) \longrightarrow & h(2)=8 \end{array}\right\} \quad h(n)=2^{(n+1)}\,u(n)$$




y(n)=X(n)*h(n)

وارون سازی و جمع با n

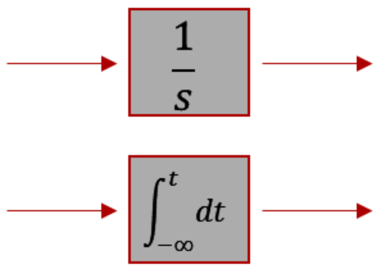



$n<0\ (n\leq -1) \longrightarrow y(n)=0$

$$n\geq 0 \longrightarrow y(n)=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}\ 2^{k+1}=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-k}\times 2^{k}\times 2=$$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\ \sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{-k}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\frac{1-(4)^{n+1}}{1-4}$$

## نمایش بلوک دیاگرامی معادلات دیفرانسیلی با استفاده از بلوک های انتگرال



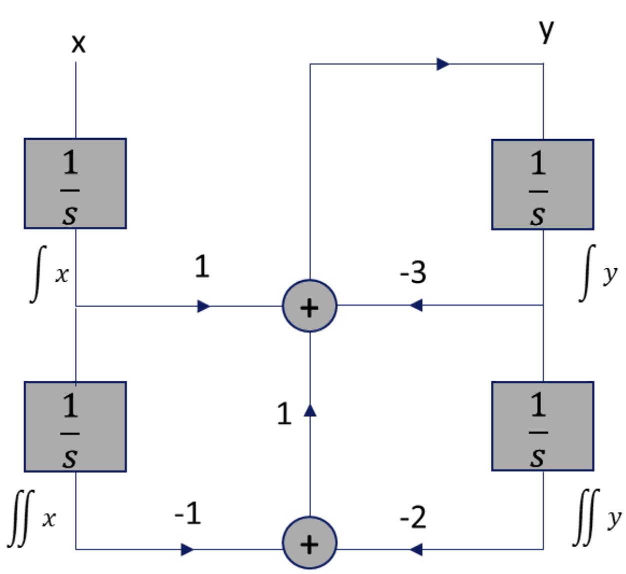

$$y" + 3y' + 2y = x' - x$$

از دو بلوک مشتق گیرو انتگرال می توانیم استفاده کنیم که بلوک مشتق گیر مناسب نیست چون نویز را زیاد میکند و در عمل قابل قبول نیست.

اکنون برای استفاده از بلوک انتگرال گیر، به اندازه بیشترین مرتبه y انتگرال میگیریم. طبق معادله:

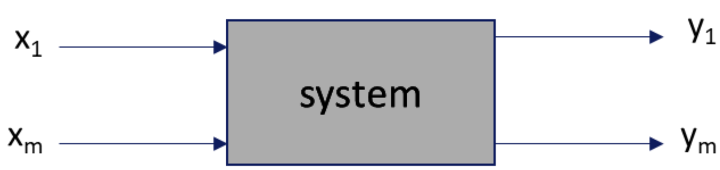
$$\iint y'' + 3\iint y' + 2\iint y = \iint x' - \iint x$$

$$y = \int x - \iint x - 3\int y - 2\iint y$$




ادامه همانند گسسته است

از دیدگاه تعداد ورودی وخروجی نیز میتوانیم سیستم ها را دسته بندی کنیم. در این درس ما فقط با سیستم های SISO سروکار داریم.




$m=1$ , $p=1$ ⟶ SISO

$m$ , $p=1$ ⟶ MISO

$m=1$ , $p$ ⟶ SIMO

$m$ , $p$ ⟶ MIMO

اگر بالاترین مرتبه مشتق ورودی در معادله دیفرانسیل سیستم را برابر با $m$ و بالاترین مرتبه مشتق خروجی در معادله دیفرانسیل را برابر با $n$ فرض کنیم. از دیدگاه مقایسه ای مابین $m$ و $n$ میتوان سیستم ها را به سه فرم مهم زیر نیز دسته بندی کرد. البته در اغلب موارد سیستم هایی که در این درس مطالعه خواهیم کرد سیستم های اکیدا سره و سره هستند.

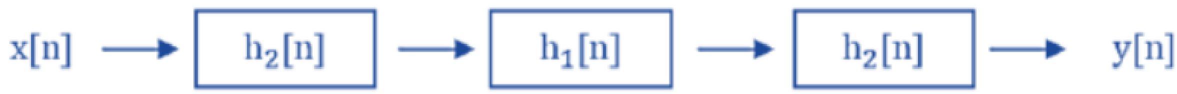
$n>m$ ⟶ اکیداً سره ✓

$n=m$ ⟶ سره ✓

$n<m$ ⟶ نا سره ✗

Lecture 04

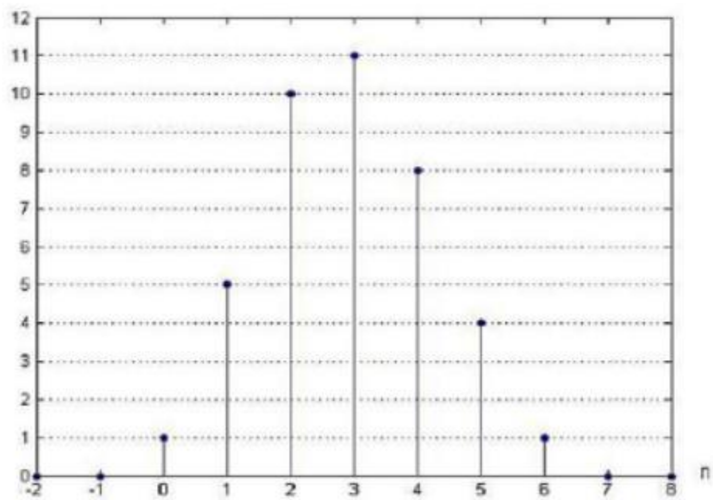
سوال: ترکیب سری دو سیستم علی و LTI در بلوک دیاگرام زیر نمایش داده شده است :




پاسخ ضربه $h_2$ به صورت زیر بیان شده است :

$$h_2(n) = u(n) - u(n-2)$$

و پاسخ ضربه کل سیستم به صورت زیر بیان شده است :




(The values are 0 when n < 0 and n > 6)

پاسخ ضـــــربه $h_1$ را تعیین کنید.

نقطه شروع پاسخ ضربه کل ۰ و نقطه پایان آن ۶ میباشد و میدانیم پاسخ ضربه به شکل زیر میباشد:

$$h(n) = h_2(n) * h_1(n) * h_2(n)$$

$$h_2(n) = u(n) - u(n-2) = \delta(n) + \delta(n-1)$$

$$\Rightarrow h(n) = \big(\delta(n) + \delta(n-1)\big) * h_1(n) * \big(\delta(n) + \delta(n-1)\big) =$$

$$h(n) = (\delta(n) + 2\delta(n-1) + \delta(n-2)) * h_1(n)$$

پس نقطه شروع $h_1$(صفر) و نقطه پایان آن ۴ میباشد.(چرا؟)

$$h(n) = h_1(n) + 2h_1(n-1) + h_1(n-2)$$

با قرار دادن n=0 خواهیم داشت :

$$h(0) = h_1(0) + 2h_1(-1) + h_1(-2) = h_1(0) = 1$$

$$h(1) = h_1(1) + 2h_1(0) + h_1(-1) \;\Rightarrow h_1(1) = 3$$

$$h(2) = h_1(2) + 2h_1(1) + h_1(0) \;\Rightarrow h_1(2) = 3$$

$$h(3) = h_1(3) + 2h_1(2) + h_1(1) \;\Rightarrow h_1(3) = 2$$

$$h(4) = h_1(4) + 2h_1(3) + h_1(2) \;\Rightarrow h_1(4) = 1$$

نمودار پاسخ ضربه $h_1$ را خواهیم داشت :