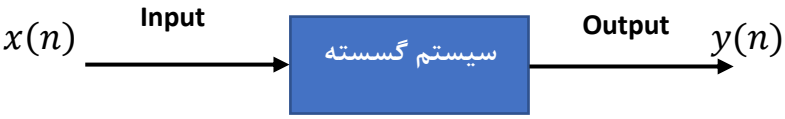
سیستم ها :

یک سیستم، یک یا چند سیگنال از ورودی میگیرد و با اعمال تغییر و یا بدون تغییر، سیگنال خروجی را تولید میکند به عبارت دیگر یعنی یک یا چند سیگنال در خروجی ایجاد میکند. توجه داشته باشیم که نوع سیگنال ورودی و خروجی باید از یک نوع باشد (هر دو گسسته یا هر دو پیوسته) بررسی سیستم هایی که نوع سیگنال ورودی و خروجی متفاوت باشند (ورودی پیوسته و خروجی گسسته یا بالعکس) از اهداف این درس نیست و در دروس آتی و در مقاطع بالاتر مطالعه خواهد شد.



سیستم:

از دید سیستمی : رابطه ورودی و خروجی :

$$y(n) = x(n)(x(n) - 2) \quad or \; y(t) = x^2(t)$$

از دید سیگنالی : رابطه ورودی و خروجی در حوزه زمان :

$$x(n) = (\frac{1}{2})^n \quad y(n) = (-\frac{1}{2})^n$$

دسته بندی مهم سیستم ها بر اساس خصوصیات سیستمی:

سیستم پیوسته یا گسسته – خطی یا غیر خطی – عِلّی یا غیرعِلّی – حافظه دار یا بدون حافظه – پایدار یا ناپایدار –

تغییرناپذیر با زمان یا متغییر با زمان – وارون پذیر یا وارون ناپذیر

۱- سیستم پیوسته یا گسسته : اگر سیگنال ورودی و خروجی یک سیستم و دینامیک حاکم بر آن در هر لحظه از زمان پیوسته باشد آن سیستم را پیوسته گویند و اگر سیگنال ورودی و خروجی از نوع گسسته باشند سیستم را گسسته گویند.

۲- خطی یا غیر خطی : اگر سیستمی خاصیت همگنی و جمع پذیری را نسبت به ورودی داشته باشد سیستم خطی است.

خاصیت همگنی $\boldsymbol{y(t) = F\{x(t)\}}$ $\boldsymbol{Ay(t) = F\{Ax(t)\}}$

خاصیت جمع پذیری $\boldsymbol{y_1(t) \pm y_2(t) = F\{x_1(t) \pm x_2(t)\}}$

خاصیت خطی $\boldsymbol{Ay_1(t) \pm By_2(t) = F\{Ax_1(t) \pm Bx_2(t)\}}$

۳- عِلّی یا غیرعِلّی : سیستم را عِلّی گویند اگر خروجی سیستم در هر لحظه از زمان به ورودی سیستم در همان لحظه یا لحظات ما قبل وابسته باشد.

۴- حافظه دار یا بدون حافظه : سیستم را حافظه دار گویند اگر خروجی سیستم در هر لحظه علاوه بر ورودی همان لحظه به لحظات ماقبل یا مابعد ورودی نیز وابسته باشد.

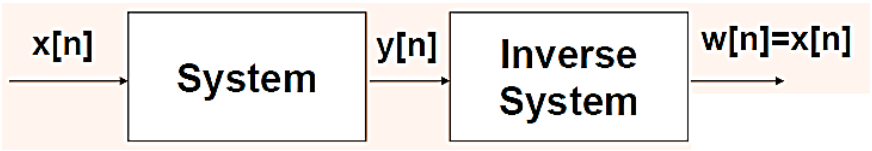
۵- سیستم پایدار یا ناپایدار : سیستم را پایدار گویند اگر ورودی محدود خروجی محدود ایجاد کند یعنی اگر به جای ورود مقدار ثابتی مثل M قرار دهیم خروجی مقدار ثابتی مثل N شود به این نوع از پایداری پایداری BIBO(Bounded Input Bounded Output) گویند.

۶- تغییرناپذیر با زمان یا متغییر با زمان : سیستم را تغییر ناپذیر با زمان گویند اگر ورودی به اندازه t_0 یا n_0 به راست یا چپ شیفت پیدا کند خروجی نیز به همان اندازه در همان جهت شیفت پیدا کند.

$\boldsymbol{x_1(t) \longrightarrow y_1(t)}$

$\boldsymbol{x_2(t) \longrightarrow y_2(t)}$ $\longrightarrow$ فرض: $\boldsymbol{x_2(t) = x_1(t - t_0)}$ حکم: $\boldsymbol{y_2(t) = y_1(t - t_0)}$

۷- وارون پذیر یا وارون ناپذیر : سیستم را وارون پذیر گویند اگر همان طور که ورودی ها خروجی ها را ایجاد میکنند رابطه ای پیدا کنیم که خروجی ها نیز بتوانند دقیقا همان ورودی ها مربوطه را ایجاد کنند.



$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n} x[k]$$

آیا سیستم روبرو معکوس‌پذیر است؟

$$y[n]=\sum_{k=-\infty}^{n-1} x[k]+x[n], \qquad y[n]=y[n-1]+x[n], x[n]=y[n]-y[n-1]$$

$$w[n]=x[n]=y[n]-y[n-1]$$

سیستم معکوس

مثال : خاصیت سیستم های زیر را بررسی کنید :

$1) y(t)=x(t-2)$

پیوسته – خطی – عِلّی – حافظه دار – پایدار – تغییر ناپذیر با زمان وارون پذیر

$t=5 \longrightarrow y(5)=x(3)$ خروجی به لحظات ماقبل ورودی وابسته است

اگر عِلّی باشد نمیتوانیم بگوییم که حتما حافظه دار است.

$t \to t+2 \longrightarrow x(t)=y(t+2)$
وارون پذیر

عموما خاصیت تغییر پذیری با زمان را اثبات میکنیم :

$\mathbf{1}: y_1(t) \longrightarrow x_1(t-2)$
$\mathbf{2}: y_2(t) \longrightarrow x_2(t-2)$
$\mathbf{3}: x_2(t)=x_1(t-t_0) \longrightarrow x_2(t-2)=x_1(t-2-t_0)$ فرض

$\mathbf{2}$ و $\mathbf{3} \longrightarrow y_2(t)=x_1(t-2-t_0)$
$1 \quad y_1(t-t_0)=x_1(t-2-t_0)$
$t \to t-t_0$

$\Rightarrow y_2(t)=y_1(t-t_0)$

$2) y(n) = nx(2n)$

گسسته – خطی – غیرعِلّی – حافظه دار – ناپایدار – تغییر پذیر با زمان – وارون ناپذیر

وقتی ورودی را شیفت می دهیم فقط خروجی شیفت پیدا میکند اما وقتی خروجی را شیفت میدهیم، هم n و هم x(2n) شیفت پیدا میکند که نتیجه یکسان نشد پس تغییر پذیر با زمان است

به ازای n=0 تعریف نشده است پس وارون ناپذیر است

$$x(n) = \frac{y(\frac{n}{2})}{\frac{n}{2}}$$

$$3) y(t) = \begin{cases} x(t-2) & t \geq 0 \\ x(t+2) & t < 0 \end{cases}$$

پیوسته – خطی – غیرعِلّی – حافظه دار – پایدار – تغییر پذیر با زمان – وارون ناپذیر

$$\left.\begin{array}{ll} x(t) = y(t+2) & t+2 \geq 0 \longrightarrow t \geq -2 \\ x(t) = y(t-2) & t-2 < 0 \longrightarrow t < 2 \end{array}\right\} \quad x(t) = \begin{cases} y(t+2) & t \geq -2 \\ y(t-2) & t < 2 \end{cases}$$

نکات تکمیلی:

سعی کنین درستی و نادرستی هر یک از موارد زیر را نشان دهید. برای نشان دادن درستی می بایست اثبات کنین و برای نشان دادن نادرستی میتوانید مثال نقض نیز ارائه دهید.

الف) در یک سیستم خطی پاسخ ورودی صفر همواره صفر خواهد بود.

ب) پاسخ یک سیستم خطی به ورودی متناوب قطعا متناوب خواهد بود.

ج) پاسخ یک سیستم تغییرناپذیر با زمان به ورودی متناوب قطعا متناوب خواهد بود.

د) پاسخ یک سیستم LTI به ورودی متناوب قطعا متناوب خواهد بود.

و) یک سیستم غیرعلی همواره حافظه دار است.

ه) یک سیستم بدون حافظه حتما علی است.

Lecture 03

سوال: خواص سیستم فیدبک دار زیر را بررسی کنید و پاسخ آن به ازای ورودی $\delta(n)$ را بدست آورید.

$$y(n) = y(n-1) + 2x(n)$$

پاسخ:

میتوان y(n) را به صورت زیر نیز بیان کرد(y(n-1) را بسط میدهیم):

$$y(n) = y(n-1) + 2x(n) \Rightarrow y(n) = y(n-2) + 2x(n) + 2x(n-1)$$

$$y(n) = y(n-3) + 2(x(n) + x(n-1) + x(n-2))$$

و به طور مشابه از بسط y(n-3) تا آخر خواهیم داشت :

$$y(n) = 2(x(n) + x(n-1) + x(n-2) + \cdots)$$

$$\rightarrow y(n) = 2\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$$

حال به بررسی خواص آن میپردازیم :

-پر واضح است که سیستم خطی میباشد.(چرا؟)

-تغییری پذیری با زمان :

$$y_1(n) \longrightarrow x_1(n)$$

$$y_2(n) \longrightarrow x_2(n) = x_1(n - n_0)$$

$$y_2(n) = 2\sum_{k=-\infty}^{n} x_2(k) = 2\sum_{k=-\infty}^{n} x_1(k-n_0)$$

$$y_1(n-n_0) = 2\sum_{k=-\infty}^{n-n_0} x(k) \xrightarrow{\text{اندیس}} y(n-n_0) = 2\sum_{k=-\infty}^{n} x(k-n_0)$$

پس میتوان نتیجه گرفت: $y_2(n)=y_1(n-n_0)$ و در نتیجه سیستم تغییر ناپذیر با زمان است.

پایداری :

اگر به جای ورودی $x(n)$ مقدار ثابت M را در نظر بگیرید حاصل یک عدد خیلی بزرگ میشود که نشان میدهد سیستم ناپایدار است.

علیت : مسلم است که سیستم فقط به حال و گذشته مربوط است پس علی میباشد.

حافظه داری : سیستم علاوه بر حال به گذشته نیز مربوط است پس حتما حافظه دار است.

وارون پذیری : میتوان به صورت زیر وارون سیستم را پیدا کرد .پس وارون پذیر است.

$$y(n) - y(n-1) = 2x(n) \Rightarrow x(n) = \frac{y(n) - y(n-1)}{2}$$

پاسخ به ازای ورودی $\delta(n)$ $(h(n))$

$$h(n) = 2\sum_{k=-\infty}^{n} \delta(n) = 2 \cdot u(n) = 2u(n)$$

در فصل های بعد با کمک تبدیل فوریه همین جواب را قبلی راحتر میتوان محاسبه کرد.