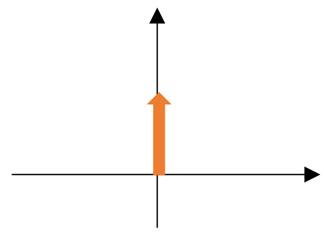
قبل از اینکه بخواهیم بقیه خصوصیات سیگنال ها را معرفی کنیم برخی از سیگنالهای پر کاربرد در این درس را معرفی میکنیم :

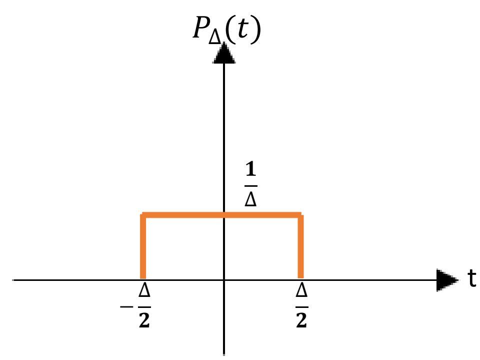
۱ ) سیگنال ضربه پیوسته :

$$\delta(t) = \begin{cases} \text{مقدار ویژه} & t=0 \\ 0 & t\neq 0 \end{cases}$$



و یا میتوان بصورت زیر با استفاده از تابع و یا سیگنال پالس تعریف کرد:

$$\delta(t) = \lim_{\Delta\to 0} P_\Delta(t)$$

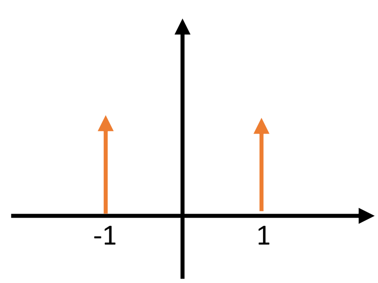



برخی از ویژگی های سیگنال ضربه را که در ادامه با آنها بیشتر کار خواهیم کرد را در زیر معرفی میکنیم :

1) $$\delta(f(t)) = \begin{cases} \text{مقدار ویژه} & f(t) = 0 \\ 0 & f(t) \neq 0 \end{cases}$$

برای مثال:

$$\delta(t^2-1) = \begin{cases} \text{مقدار ویژه} & t=\pm 1 \\ 0 & t \neq \pm 1 \end{cases}$$



$\delta(t^2-1)=\frac{1}{2}\delta(t-1)+\frac{1}{2}\delta(t+1)$

2) $\delta(at)=\frac{1}{|a|}\delta(t)$

این خاصـــیت را اثبات کنید. چون اثبات های طولانی و خســـته کننده از اهداف این درس نیســـت، اثبات این خاصیت بصورت اختیاری به دانشجویان علاقه مند واگذار میشود.

3) $\delta\left[(t-t_0)(t-t_1)\dots(t-t_n)\right] = \xrightarrow{\text{طبق خاصیت ۲}}$

$$\frac{\delta(t-t_0)}{|t_0-t_1|\dots|t_0-t_n|}+\frac{\delta(t-t_1)}{|t_1-t_0|\dots|t_1-t_n|}+\dots+\frac{\delta(t-t_n)}{|t_n-t_0|\dots|t_n-t_{n-1}|}$$

4) $f(t).\delta(t)=f(0).\delta(t)$ (خاصیت غربالی سیگنال ضربه)

تعمیم : $f(t).\delta(t-t_0)=f(t_0).\delta(t-t_0)$

عملگر کانولوشن

5) $f(t)*\delta(t)=f(t)$ در فصل بعدی با کانولوشن بیشتر آشنا خواهیم شد

تعمیم :

$f(t)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0)$

$f(t-t_1)*\delta(t-t_0)=f(t-t_0-t_1)$

نتیجه:

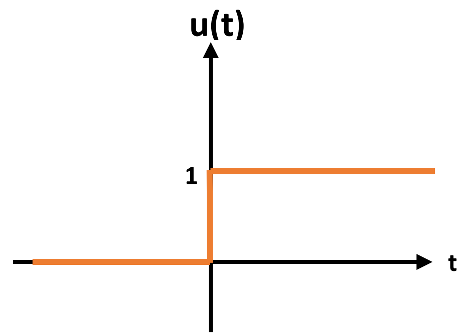
6) $u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau$ or $\delta(t)=\frac{d}{dt}u(t)$

$$\left.\begin{aligned}&(f(t).\delta(t))'=f'(t).\delta(t)+f(t).\delta'(t)\\&(f(0).\delta(t))'=f'(0).\delta(t)+f(t).\delta'(t)\\&f(0).\delta'(t)=f'(0).\delta(t)+f(t).\delta'(t)\end{aligned}\right\}\quad (f(0)-f(t)).\delta'(t)=f'(0).\delta(t)$$

7) $\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt = 1$

**۲ ) سیگنال پله پیوسته :**

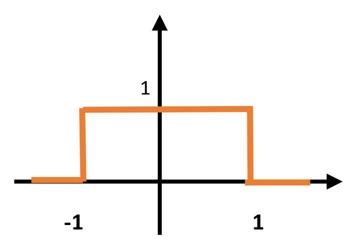
$$\mathbf{u(t)}= \begin{cases} 1 & t \geq 0 \\ 0 & t \leq 0 \end{cases}$$




$$u(f(t))= \begin{cases} 1 & f(t)\geq 0 \\ 0 & f(t) \leq 0 \end{cases}$$

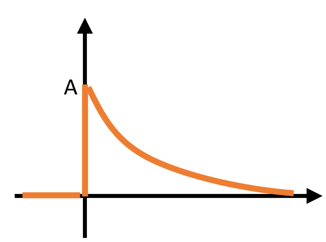
براي مثال :

$$u(1-t^2)= \begin{cases} 1 & 1-t^2 \geq 0 \\ 0 & 1-t^2 \leq 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & -1<t<1 \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

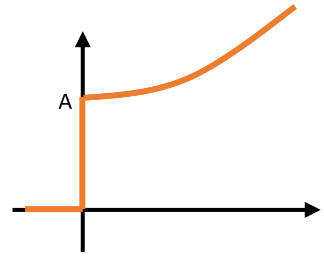



۳ ) سیگنالهای نمایی :

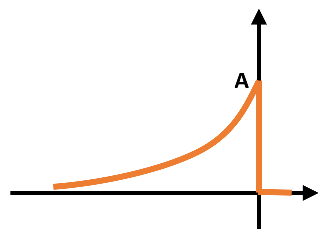
$$x(t) = A\, e^{-\alpha t}u(t) \qquad \alpha > 0$$



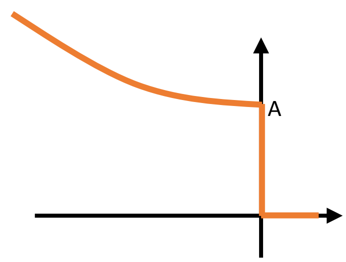
$$x(t) = Ae^{+\alpha t}u(t)$$



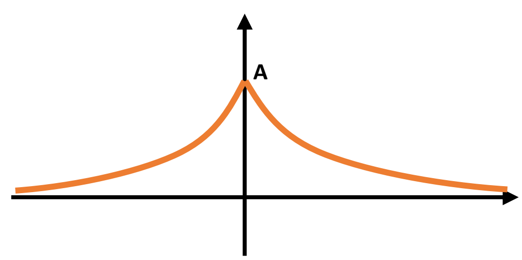

x(t)=A$e^{\alpha t}$u(-t)




$$x(t) = Ae^{-\alpha t}u(-t)$$

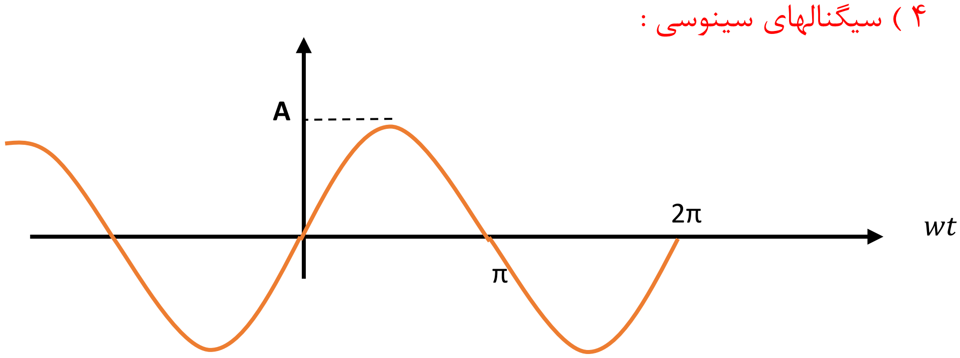



$$x(t) = Ae^{-\alpha|t|}$$

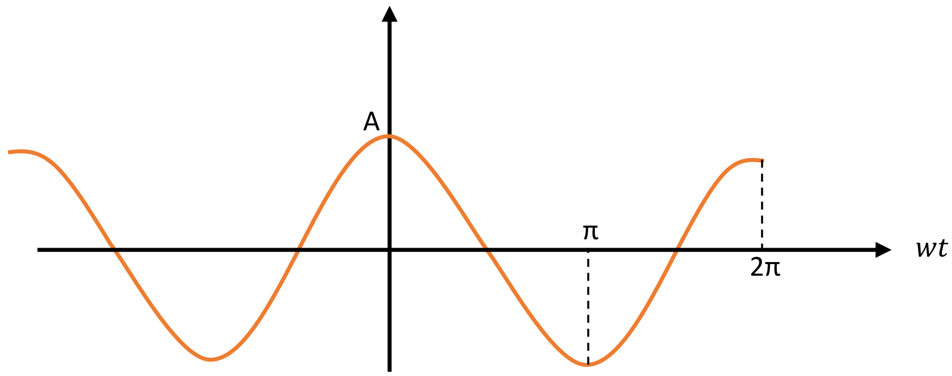



۴ ) سیگنالهای سینوسی :

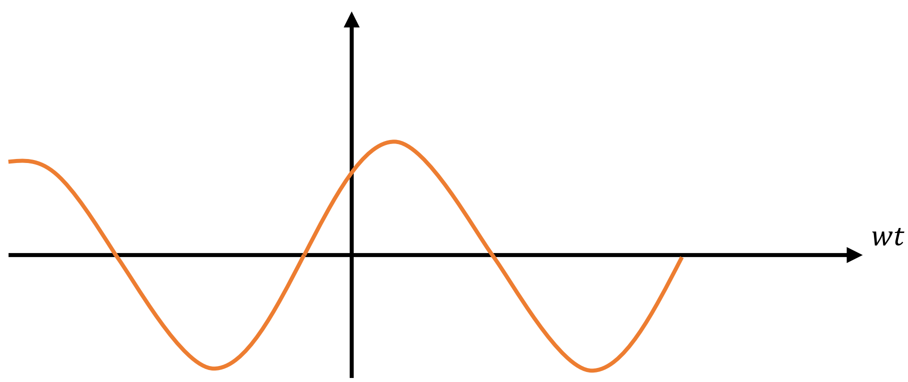
$$x(t) = Asin(wt)$$



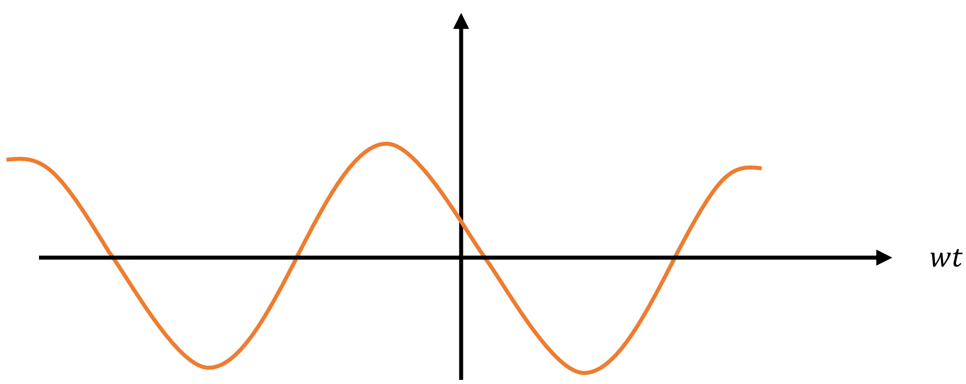
$x(t) = A\cos(wt)$




$x(t) = A\sin(wt + \varphi)$

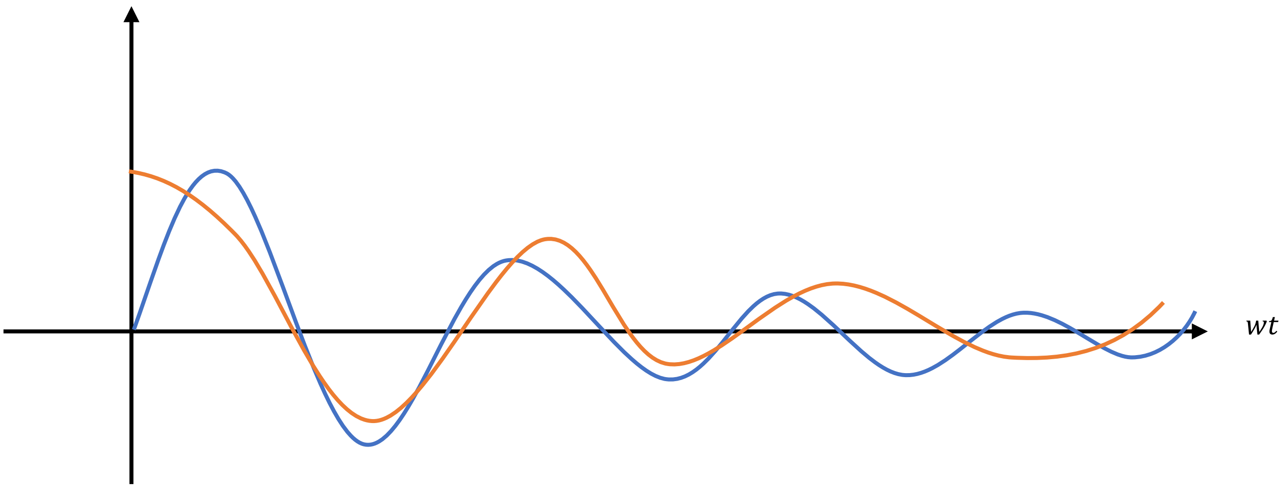



$x(t) = A\cos(wt + \varphi)$

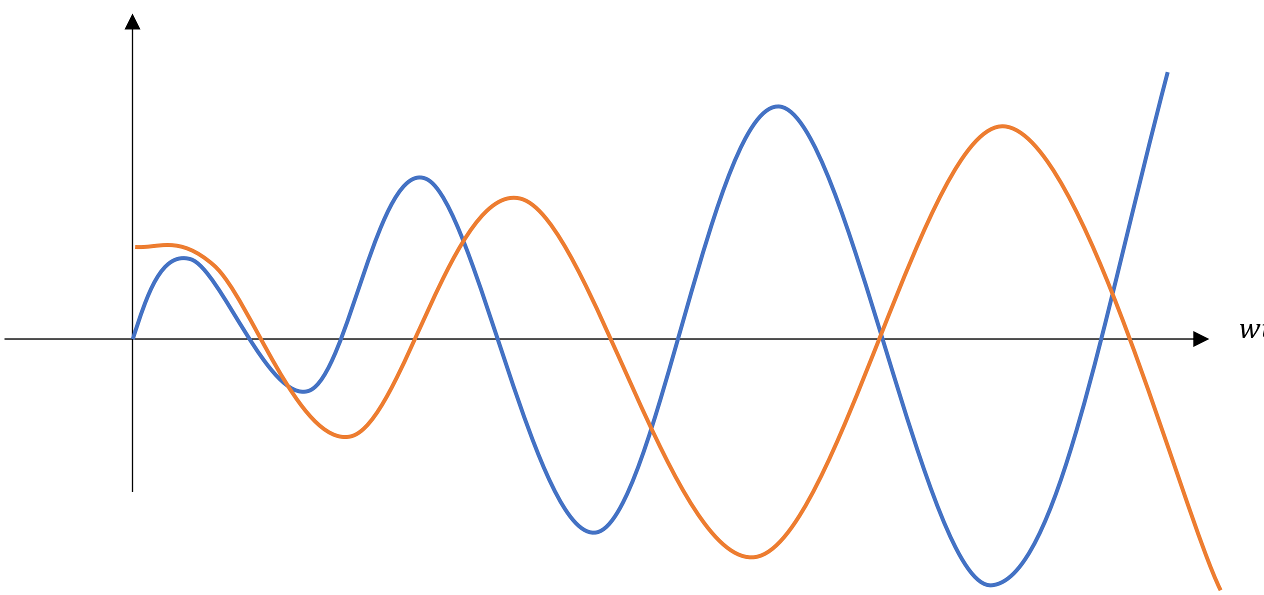


**۵ ) سیگنال های نمایی – سینوسی :** از حاصل ضرب برخی نمایی ها و سینوسی ها حاصل میشود.

$x(t) = Ae^{-\alpha t}\sin(wt)u(t)$ or $x(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(wt)u(t)$

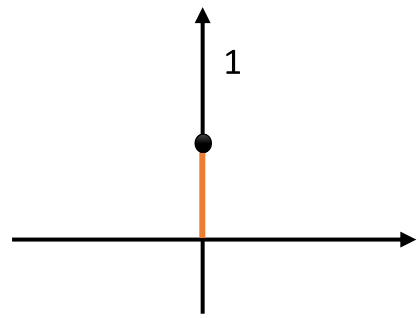



$x(t) = Ae^{\alpha t}\sin(wt)u(t)$ or $x(t) = Ae^{\alpha t}\cos(wt)u(t)$



۶) سیگنال ضربه گسسته : نکته ای که باید توجه کرد این ا ست که ضربه پیو سته سر تیزه و در صفر مقدار ویژه دارد درحالی که ضربه گسسته سر گرده و در صفر مقدار ۱ دارد.

$$\delta(n) = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n\neq 0 \end{cases}$$

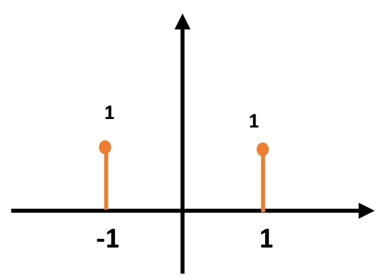



خواص:

**1)** $$\delta(f(n)) = \begin{cases} 1 & f(n) = 0 \\ 0 & f(n) \neq 0 \end{cases}$$

براي مثال :

$$\delta(n^2-1)= \begin{cases} 1 & n=\pm 1 \\ 0 & n \neq \pm 1 \end{cases}$$




آیا خاصیت scaling برای ضربه گسسته هم برقرار است؟؟

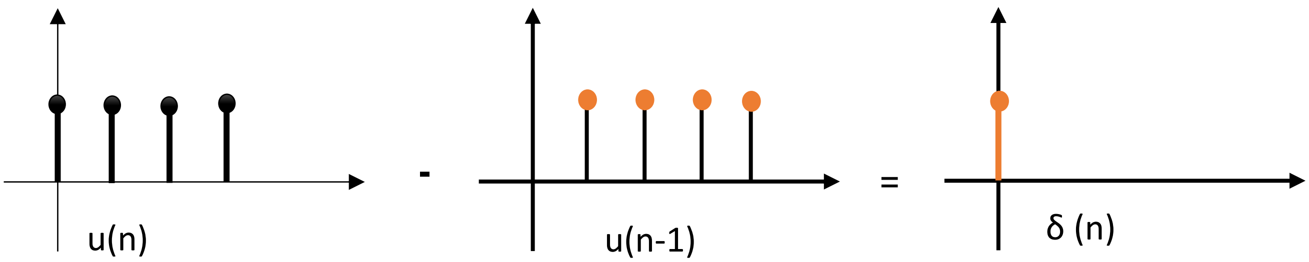
**2)** $\delta(an)=\frac{1}{|a|}\delta(n)$

**3)** $f(n).\delta(n)=f(0).\delta(n)$ $\quad$ $f(n).\delta(n-n_0)=f(n_0).\delta(n-n_0)$

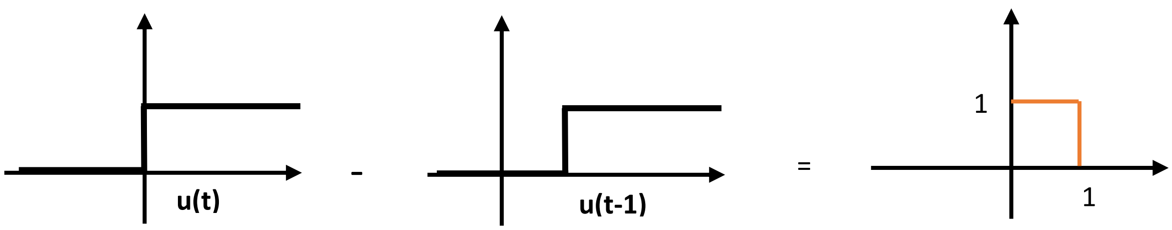
**4)** $f(n)*\delta(n-n_0)=f(n-n_0)$ $\quad$ $f(n)*\delta(n)=f(n)$

به شکل نمودار :

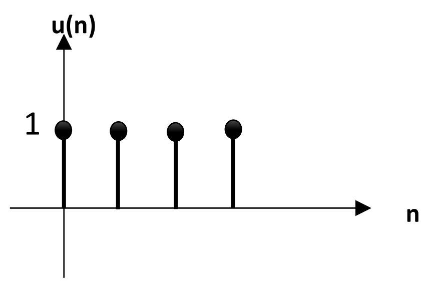
**5)** $\delta(n) = u(n) - u(n-1)$




همین کار را برای حالت پیوسته نیز تکرار میکنیم : نتیجه میگیریم نتیجه تفریق دو سیگنال پیوسته اصلا شبیه دو سیگنال گسسته نیست.




۷ ) سیگنال پله گسسته :




$$u(n)=\begin{cases} 1 & n \geq 0 \\ 0 & n < 0 \end{cases}$$

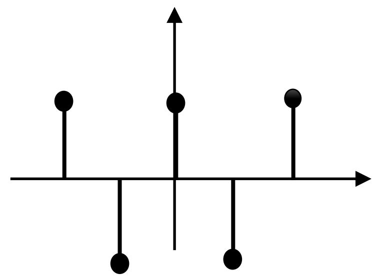
$$u(f(n))=\begin{cases} 1 & f(n) \geq 0 \\ 0 & f(n) < 0 \end{cases}$$

براي مثال :

$$u(-2n+2)=\begin{cases} 1 & -2n+2 \geq 0 \\ 0 & -2n+2 < 0 \end{cases} = \begin{cases} 1 & n \leq 1 \\ 0 & n > 1 \end{cases}$$

مثالي ديگر :

$x(n)=(-1)^n=\cos(n\pi)$

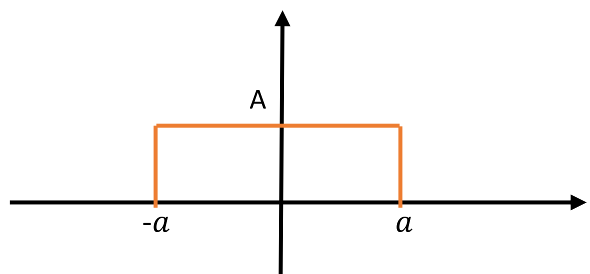


رابطه مابین سیگنال ضربه و پله گسسته به فرم زیر می باشد.

$$u[n]=\sum_{k=\infty}^{0}\delta[n-k]\quad or\quad u[n]=\sum_{k=0}^{\infty}\delta[n-k]$$

**۸ ) سیگنال rect :**

$A\,\Pi(\frac{t}{2a}) = A\ \ rect(\frac{t}{2a})$

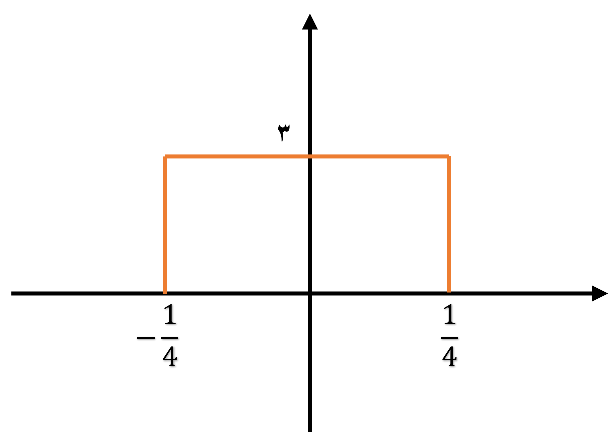



سیگنال rect را بصورت زیر نیز میتوانیم نمایش دهیم ( با استفاده از سیگنال پله پیوسته):

$A\Pi(\frac{t}{2a})=Au(t+a)-Au(t-a)$

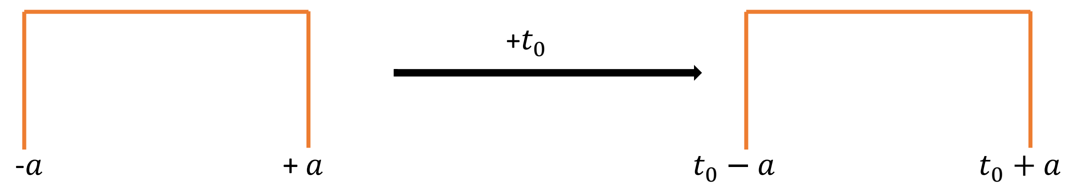
مثال :

$3\Pi(2t) = 3\Pi(\frac{t}{\frac{1}{2}})$




نکته :

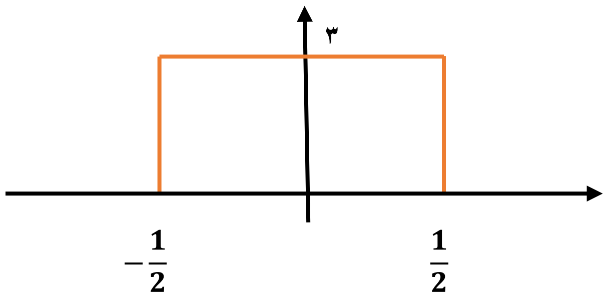
$A\Pi(\frac{t-t_0}{2a})=Au(t-t_0+a)-Au(t-t_0-a)$




مثال:

با توجه به نکته بالا این مثال را حل میکنیم

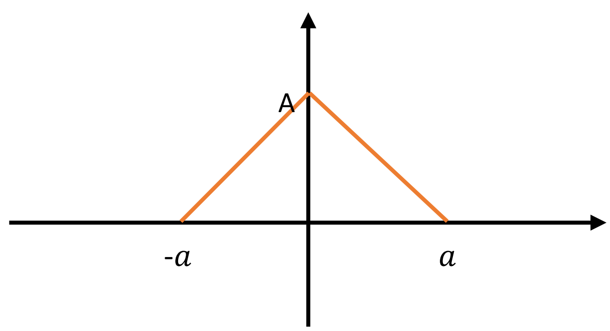
$3\pi(t-2)$ $\qquad$ $3\pi(t) \longrightarrow 3\pi(t-2)$



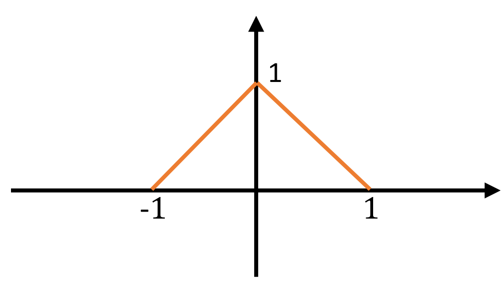


۹ ) سیگنال مثلثی:

$A\,\Lambda(\frac{t}{a})$ $\qquad$ or $\qquad$ $A\,\mathrm{tri}(\frac{t}{a})$




$\Lambda(t) \longrightarrow$

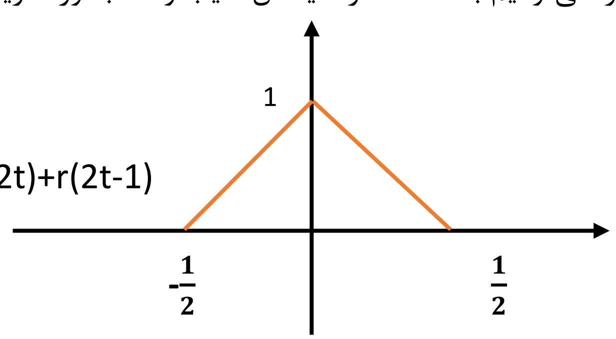



سیگنال tri(t) را می‌توانیم با استفاده از سیگنال شیب واحد بصورت زیر نیز تعریف کنیم :

$\Lambda(t)=r(t+1)-2r(t)-r(t-1)$

مثال :

$\Lambda(2t)=\Lambda(\frac{t}{\frac{1}{2}})=r(2t+1)-2r(2t)+r(2t-1)$



دقیقا همانند شیفت نموداری عمل میکنیم $\longrightarrow$ $\Lambda(t-t_0)$

نکته: با سیگنال rect و tri مانند سایر سیگنال های معرفی شده برخورد میکنیم.

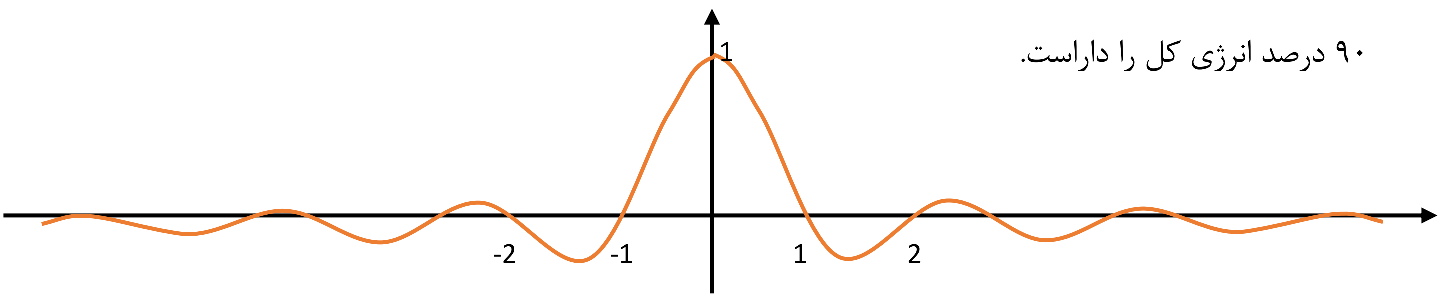
۱۰ ) سیگنال $sinc(t)$:

$$sinc(t)=\frac{sin(\pi t)}{\pi t}$$

در t=0 مبهم است اما وقتی t به سمت صفر میل میکند.
مقدار حدی برابر یک دارد.

ویژگی منحصر بفرد این سیگنال این است که بازه [-1,1]

۹۰ درصد انرژی کل را داراست.




**سیگنال متناوب یا نامتناوب :**

**اگر :**

$$x(t)=x(t+T_0) \quad \text{پیوسته}$$
$$x(n)=x(n+N_0) \quad \text{گسسته}$$

باشد سیگنال را متناوب گویند در غیر اینصورت سیگنال نامتناوب است. $T_0$ و $N_0$ به ترتیب کوچکترین دوره تناوب x(t) و x(n) هستند که دوره تناوب اصلی سیگنال می باشند.

همانطور که در جلسات اول گفته شد سیگنالهای گسسته فقط شامل اعداد صحیح هستند. بنابرین دوره تناوب اصلی سیگنالهای پیوسته هر عددی میتواند باشد ولی با توجه به نکته بالا **دوره تناوب اصلی سیگنال های گسسته نیز باید عدد صحیح باشد** در غیر اینصورت متناوب نیست.

مثال:

$$x(t)=\sin(\pi t) \dashrightarrow T_0=2$$

$$x(n)=\sin(3\pi n) \dashrightarrow N_0=\frac{2\pi}{3\pi}=\frac{2}{3}$$

$$N_0=\frac{2}{3}\times 3 \dashrightarrow N_0=2$$

یک عدد صـــحیح نیســـت. ولی میتوانیم با ضرب یا تق سیم در یک عدد صـــحیح به یک عدد صـــحیح تبدیلش کنیم.

مثال :

$$x(n)=\sin(n) \dashrightarrow N_0=\frac{2\pi}{1}=2\pi$$

عددی صـــحیحی وجود ندارد که با ضـرب یا تقســیم در آن به یک عدد صحیح برسیم. پس متناوب نیست.

$$x(t)=\sin(t) \dashrightarrow T_0=\frac{2\pi}{1}=2\pi$$

متناوب است

**یاد آوری:** دوره تناوب برخی از سیگنال ها(توابع):

$$\left.\begin{matrix} sin^{2k+1}(\omega t) \\ cos^{2k+1}(\omega t) \end{matrix}\right] \quad T_0=\frac{2\pi}{\omega}$$

$$sin^{2k}(\omega t) \quad , \quad cos^{2k}(\omega t) \quad |\sin^m(\omega t)| \quad , \quad |\cos^m(\omega t)| \qquad T_0=\frac{\pi}{\omega}$$

**نکته:** برای پیدا کردن دوره تناوب سیگنال های تواندار یا ضربی سینوسی و کسینوسی ابتدا با استفاده از روابط تبدیل ضرب به جمع ، تبدلشون میکنیم سپس دوره تناوبشان را پیدا میکنیم.

مثال: x(t) حاصل تبدیل ضرب به جمع است دوره تناوب را پیدا کنید :

$$x(t)=\sin(2\pi t)+3\cos(5\pi t)+7\sin\left(\frac{7\pi}{3}t\right)+\cos(\frac{6\pi}{5}t)$$

$$T=1 \qquad T=\frac{2}{5} \qquad T=\frac{6}{7} \qquad T=\frac{5}{3}$$

$$T_0=\frac{2\pi}{\omega_0}$$

برای حل $\omega_0$ را طوری پیدا میکنیم که $\omega$ های موجود ضریب همه $\omega$ ها باشد :

$$2\pi = 30 \times \frac{\pi}{15}$$

$$5\pi = 75 \times \frac{\pi}{15}$$

$$\frac{7\pi}{3} = 35 \times \frac{\pi}{15} \quad \Rightarrow \quad \omega_0 = \frac{\pi}{15} \longrightarrow T_0 = \frac{2\pi}{\frac{\pi}{15}} = 30$$

$$\frac{6\pi}{5} = 18 \times \frac{\pi}{15}$$

راه حل دوم :

$T_0 =$ ک.م.م $\left\{1, \frac{2}{5}, \frac{6}{7}, \frac{5}{3}\right\}$ =۳۰

بعنوان تمرین پیدا کنید که چطوری عدد ۳۰ بدست آمد؟

**نکته:**سه سیگنال tri(t) و rect(t) و sinc(t) در حالت عادی متناوب نیستند مگر اینکه خودمان متناوبشان کنیم.

**سیگنال:**
- **انرژی:** $E_\infty =$ cte , $P_\infty = 0$
- **توان:** $E_\infty = \infty$ , $P_\infty = cte$

**نکته :** مقدار ثابت توان و انرژی میتواند صفر،عددی مثبت یا منفی باشد.

توان و انرژی سیگنال پیوسته :

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |x(t)|^2 \, dt \qquad Energy$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} |x(t)|^2\, dt \qquad Power$$

توان و انرژی سیگنال گسسته :

$$E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 \qquad Energy$$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{2N+1}\sum_{n=-N}^{N} |x(n)|^2 \qquad Power$$

مثال :

$$x(t) = e^{-2t}u(t)$$

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty}\int_{-T}^{T} |e^{-2t}u(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty}\int_{0}^{T} e^{-4t}dt = \lim_{T\to\infty} -\frac{1}{4}(e^{-4T}-1) = \frac{1}{4}$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty}\frac{E_\infty}{2T} = 0$$

بنابراین سیگنال فوق سیگنال انرژی است.

بر خی از روابط سیگما که در این درس استفاده خواهیم کرد :

$$1)\ \sum_{n=0}^{\infty}\rho^n \begin{cases} |\rho| \ge 1 \ \rightarrow\ \infty \\ \\ |\rho| < 1 \ \rightarrow \dfrac{1}{1-\rho} \end{cases}$$

$$2)\ \sum_{n=0}^{M}\rho^n = \frac{1-\rho^{M+1}}{1-\rho}$$

$$3)\ \sum_{n=m}^{M}\rho^n = \sum_{k=0}^{M-m}\rho^{k+m} = \rho^m\sum_{k=0}^{M-m}\rho^k = \rho^m\left(\frac{1-\rho^{M-m+1}}{1-\rho}\right) = \frac{\rho^m-\rho^{M+1}}{1-\rho}$$

مثال :

$$x(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n u(n)$$

$$E_\infty = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=0}^{N} (\frac{1}{4})^n = \lim_{N\to\infty} \frac{1-(\frac{1}{4})^{N+1}}{1-\frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

$$P_\infty = \lim_{N\to\infty} \frac{E_\infty}{2N+1} = 0$$

در نتیجه این سیگنال هم از نوع سیگنال انرژی می باشد.

**نکته :** برخی از سیگنالها نه از نوع توان هستند نه از نوع انرژی،این نوع از سیگنالها از نظر سیگنالی هیچ ماهیتی ندارند.به مثال زیر توجه کنید :

مثال :

$$x(t) = tu(t)$$

$$E_\infty = \lim_{T\to\infty} \int_{-T}^{T} |tu(t)|^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \int_{0}^{T} t^2\, dt = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{3}T^3 = \infty$$

$$P_\infty = \lim_{T\to\infty} \frac{E_\infty}{2T} = \lim_{T\to\infty} \frac{\frac{1}{3}T^3}{2T} = \infty$$

توان و انرژی این سیگنال هر دو بینهایت شدند پس این سیگنال نه از نوع توان است و نه از نوع انرژی.

مثال:

$$s(t) = 8\cos\left(\frac{\pi}{2} - 20\pi t\right) + 4\sin 15\pi t = 8\sin 20\pi t + 4\sin 15\pi t$$

Here $A_1 = 8$ and $A_2 = 4$. Thus power is

$$P = \frac{A_1^2}{2} + \frac{A_2^2}{2} = \frac{8^2}{2} + \frac{4^2}{2} = 40$$

**سیگنال :**

دارای معادله مشخصه زمانی : $x(n) = sgn(n)$ $\quad x(t) = \sin(\pi t)$

سیگنال های تصادفی (رندوم): Noise اغتشاش

$$E\big(x(t)\big) = 1 \quad \begin{cases} x(t) = 1kHz \\ x(t) = 1MHz \end{cases}$$

**نکته:** سیگنالهای رندوم قابل طراحی یا مدل سازی نیستند یعنی نمیتوانیم برایشان یک عبارت ریاضی مشخصی پیدا کنیم.

تا به اینجا همه سیگنالهایی که گفتیم همگی حقیقی بودند.

سیگنال مختلط : $x(n) \pm jy(n) \quad or \quad x(t) \pm jy(t)$

سیگنالهای مختلط حالت کلی هستند.

سیگنال حقیقی سیگنال مختلطی ا ست که بخش موهومی آن صفر می با شد.پس تمامی خ‌صو صیاتی که تا به اینجا برای سیگنال حقیقی تعریف کردیم برای سیگنالهای مختلط نیز قابل تعمیم می باشد.

پروژه دوم **MATLAB** :

برنامه ای بنویسید که یک سیگنال پیوسته یا گسسته را از ورودی بگیرد و زوج یا فرد و یا نه زوج و نه فرد بودن سیگنال را مشخص کند و نمودار آنرا رسم کند.

در صورتی که سیگنال نه زوج و نه فرد است بخش های زوج و فرد سیگنال را جدا کند و در خروجی نمایش دهد و همچنین نمودار بخش زوج و فرد سیگنال را در یک صفحه در خروجی نمایش دهد.

در جلسه قبل و همچنین این جلسه با سه مورد دیگر از سیگنالهای پر کاربرد در این درس آشنا شدیم.

این سه سیگنال بصورت پیش فرض در متلب تعریف شده اند.چون هدف یادگیری است،سیگنال های $rect(t)$ و $tri(t)$ و $sinc(t)$ را با استفاده از روابطشان در متلب تعریف کنید.

(ممکن است کاربر در ورودی سیگنال $sinc(2t+1)$ یا $2tri(t-1)$ را وارد کند برنامه باید از این سیگنالها نیز پشتیبانی کند)

راهنمایی: سیگنال های tri و rect در متلب به ترتیب به صورت : triangularPulse rectangularPulse تعریف می شود.

**سوال:** خواص سیگنال های زیر را بیان کنید.

1) $x(n) = \quad ((n-n_0)\ \ldots\ldots (n-n_k))$ $n_0, \ldots.., n_k, k > 0$

2) $x(t) = \int_{t-5}^{t+4} \lambda^2 \delta(4-2\lambda+2t)d\lambda$

**حل:** قسمت ۱:

میدانیم:

$$x(n) = \quad ((n-n_0)\ldots(n-n_k)) = \begin{cases} 1 & n = n_0, \ldots, n_k \\ 0 & n = else \end{cases}$$

$$x(n) = \quad ((n-n_0)\ldots..(n-n_k)) = \delta(n-n_0) + \cdots + \delta(n-n_k)$$

**خواص:**

**گسسته – نه زوج نه فرد – نامتناوب –سیگنال انرژی – دارای تابع زمانی مشخص – حقیقی**

قسمت دو :

$$x(t) = \int_{t-5}^{t+4} \lambda^2 \delta(4-2\lambda+2t)d\lambda = \int_{t-5}^{t+4} \lambda^2 \delta(-2\times(\lambda-t-2))d\lambda$$

$$= \frac{1}{2}\int_{t-5}^{t+4} \lambda^2 \delta(\lambda-t-2)d\lambda = \frac{1}{2}\int_{t-5}^{t+4} (t+2)^2 \delta(\lambda-t-2)d\lambda = \frac{(t+2)^2}{2}$$

خواص:

پیوسته–نه زوج نه فرد –نامتناوب – نه سیگنال انرژی و نه سیگنال توان –دارای تابع زمانی مشخص –حقیقی