بسم الله الرحمن الرحیم

جزوه درس تجزیه و تحلیل سیگنالها و سیستم ها

ارائه دهنده و استاد درس : دکتر هادی عزمی

با همکاری : رضاعبدی – اسما نصیری – علیرضا زارع – کیافرید طالب نیا

علی اکبر سامانی - پارسا وطن پور- عرفان احمدی - عرفان یعقوبی- سارینا زیرک سیما

شهریور ماه ۱۴۰۱

درس تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها یکی از مهمترین دروس همه گرایش‌های دوره کارشناسی مهندسی برق می‌باشد. در این درس ابتدا با تعریف «سیگنال» آشنا می‌شویم. که شامل مفاهیم سیگنال‌های زمان پیوسته (Continuous-time signals) و سیگنال‌های زمان گسسته (Discrete-time signals) می‌باشد. این دو دسته مهم سیگنالی را با هم مقایسه کرده و سیگنال‌های پایه و خواص مهم آن‌ها در هر دو حوزه زمان پیوسته و زمان گسسته را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

پس از تعریف و آشنایی با سیگنال‌ها، به تعریف «سیستم» می‌پردازیم و با اجزای تشکیل دهنده یک سیستم آشنا شده و همچنین خواص مهم سیستم‌ها را در حوزه زمان پیوسته و زمان گسسته مورد بررسی قرار می‌دهیم. و به طور خاص سیستم های خطی تغییر ناپذیر با زمان را مطالعه کرده و با مفهوم کانولوشن در این دسته از سیستم ها آشنا می‌شویم.

بعد از آشنایی با **سیگنال‌ها و سیستم‌ها** و خواص مهم آن‌ها، با مفهوم فرکانس آشنا می‌شویم. از آنجایی که تحلیل و بررسی خواص سیستم‌ها در حوزه فرکانس نسبت به حوزه زمان ساده‌تر است، با استفاده از روش‌هایی همچون سری فوریه، تبدیل فوریه، تبدیل لاپلاس و تبدیل Z ، سیگنال‌ها و سیستم‌ها را در حوزه فرکانس تحلیل می‌کنیم. در این درس با مباحث مهم دیگری مانند انواع فیلترها و همچنین مبحث نمونه برداری آشنا می‌شویم. در حالت کلی می‌توان اینگونه گفت که مطالعه سیگنال‌ها و سیستم‌ها به دو موضوع می‌پردازد: اطلاعات و چگونگی تأثیرگذاری آن‌ها بر پدیده‌ها.

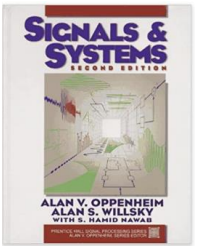
تعریف دقیق سیگنال، رخدادی متغیر است که اطلاعات را منتقل می‌کند، و تعریف دقیق یک سیستم، مجموعه‌ای از ماژول‌ها است که سیگنال‌ها را می‌گیرد و پاسخ‌هایی تولید می‌کند . همچنین در کنار این درس، در قالب چند پروژه ساده با نرم افزار MATLAB (متلب) و کاربرد آن در تجزیه و تحلیل سیگنال‌ها و سیستم‌ها آشنا خواهیم شد.

نکته مهم اینکه این جزوه با کمک دانشجویان عزیزی آماده شده است که واقعا حضور و کمک این دوستان باعث دلگرمی و اصلی ترین دلیل گردآوری این مجموعه می‌باشد. قطعا این مجموعه خالی از کاستی و اشکال نیست. لذا صمیمانه از تمامی دانشجویان که از این جزوه استفاده می‌کنند خواهشمندیم که با ارسال نکته نظراتشان ما را در تکمیل و تصحیح این جزوه یاری کنند.

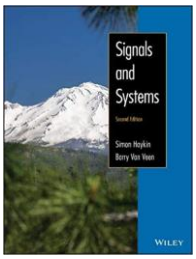
Email: h_azmi@sut.ac.ir

با آرزوی موفقیت در تمامی مراحل زندگی - **هادی عزمی** شهریور ماه ۱۴۰۱

منابع و مراجع مهم:



- Signals and Systems 2nd Edition, by Alan Oppenheim , Alan Willsky , with Hamid Nawab



- Signals and Systems, 2nd Edition by Simon Haykin , Barry Van Veen

- جزوات فصل به فصل درس تجزیه تحلیل سیگنال ها و سیستم ها دانشگاه MIT

https://ocw.mit.edu/resources/res-6-007-signals-and-systems-spring-2011/lecture-notes/

- نمونه سوالات درس تجزیه تحلیل سیگنال ها و سیستم ها به همراه حل سوالات

https://ocw.mit.edu/resources/res-6-007-signals-and-systems-spring-2011/assignments/

سرفصل ها

فصل اول : تعریف سیگنال و سیستم و بررسی خصوصیات آنها

فصل دوم : سیستم های LTI ، جمع و انتگرال کانولوشن

فصل سوم : سری فوریه سیگنالهای پیوسته و گسسته

فصل چهارم : تبدیل فوریه سیگنالهای پیوسته و گسسته

فصل پنجم : نمونه برداری و فیلترینگ

فصل ششم : تبدیل لاپلاس

فصل هفتم: تبدیل Z

بارم بندی و شیوه ارزش یابی درس:

- **تمرین :** ۴ نمره (۸ سری تمرین که در موعد مقرر بایستی تحویل داده شوند)
- **کوئیز :** ۲ نمره
- **میان ترم:** ۶ نمره
- **پایان ترم:** ۸ نمره (امتحان از کل سرفصل های کتاب می باشد)
- **پروژه MATLAB :** ۵± نمره (پروژه های شبیه سازی و برنامه نویسی با MATLAB مرتبط با درس)

فصل اول :

تعریف سیگنال و سیستم و بررسی خصوصیات آنها

سیگنال‌ها:

تعریف سیگنال: در مهندسی برق، **سیگنال** به هر کمیت متغیر با زمان گفته می‌شود که اطلاعاتی درباره رفتار یا ویژگی یک پدیده (معمولاً فیزیکی) دربردارد؛ این کمیت، اغلب با یک مبدل مناسب (مانند یک حس‌گر یا سنسور)، به ولتاژ یا جریان تبدیل شده‌است. ممکن است سیگنال، تابعی از هر متغیر مستقل دیگری جز زمان باشد (مانند میزان روشنایی پیکسل‌ها در یک تصویر ثابت)، یا دربردارنده اطلاعات نباشد (مانند یک موج سینوسی با دامنه و فرکانسی معین). البته چه بسا مفهوم، گستره، و تعریف دقیق سیگنال دشوار باشد.

مثال‌هایی از سیگنال‌ها

موقعیت - (Position)

موقعیت یک جسم متحرک در فضا را می‌توان یک سیگنال در نظر گرفت. این سیگنال، با زمان تغییر می‌کند، و مقادیر سیگنال، مختصات جسم در فضای سه‌بعدی است.

صوت - (Sound)

از آنجایی که صدا ناشی از ارتعاش هوا است، یک سیگنال صوتی تغییرات فشار هوا نسبت به زمان است. میکروفن تغییرات فشار هوا در یک مکان (صوت) را به ولتاژ تبدیل می‌کند؛ در واقع صوت به سیگنال (ولتاژ) تبدیل می‌شود.

داده‌های لوح فشرده – (CD)

در یک نگاه ساده و البته نه‌چندان دقیق، داده‌های ذخیره‌شده روی سی‌دی صوتی(Audio CD) ، سیگنال‌هایی دیجیتال هستند که در واقع نمونه‌های صوت‌اند و در هر ثانیه ۴۴هزار و صد نمونه از آن‌ها ضبط می‌شود.

تصویر ثابت دیجیتال – (Digital Still Image)

یک تصویر ثابت دیجیتال، مجموعه‌ای از پیکسل‌ها است، به‌طوری که هر پیکسل دارای مقدار مشخصی روشنایی (Luminance, Brightness) و رنگ (Chrominance, Color) است. مجموعه مقادیر روشناییِ (یا رنگ) پیکسل‌های یک تصویر ثابت را می‌توان یک سیگنال گسسته در نظر گرفت. این سیگنال، وابسته به مکان (جای هر پیکسل در صفحه تصویر) است و نه زمان.

تصویر متحرک – (Motion Picture, Video)

ویدئو (تصویر متحرک، فیلم) ترکیبی از تصاویر است، که این تصاویر یکی پس از دیگری در طول زمان نمایش داده‌می‌شوند. اطلاعات یک نقطه از ویدئوپیکسل، (Pixel) بر اساس موقعیتش در صفحه نمایش و نیز مقدار روشنایی و رنگ آن مشخص می‌شود، به طوری که این میزان روشنایی و رنگ، با زمان تغییر می‌کند. سیگنال ویدئویی دربردارنده این تغییرات روشنایی و رنگ وابسته به مکان نقطه در صفحه و نیز زمان است.

پتانسیل غشاء سلولی

این سیگنال یک پتانسیل الکتریکی است (ولتاژ) و تعیین محدوده آن دشوار است. برخی سلول‌ها دارای پتانسیل غشائی یکسانی هستند. نورون‌ها عموماً در نقاط مختلف پتانسیل‌های مختلف دارند. اگر چه این سیگنال‌ها بسیار ضعیف‌اند، اما برای راه‌اندازی سیستم عصبی کافی هستند. می‌توان میزان آن‌ها را به کمک تکنیک‌های الکتروفیزیولوژی اندازه گرفت.

- در حالت کلی روش های متعددی برای نمایش یک سیگنال وجود دارد که عبارتند از:

الف: روابط ریاضی ب) ترسیم شکل ج) تصاویر مربوط به سیگنال‌ها د) خصوصیات سیگنال‌ها

همه روش‌های نمایش سیگنال‌ها در جایگاه خودشان حائز اهمیت هستند ولی مهمترین روش برای نمایش یک سیگنال بیان خصوصیات هر سیگنال می باشد. در حالت کلی خصوصیات یک سیگنال از دیدگاه های مختلف قابل بررسی است که در درس خواص زیر را مورد بررسی قرار خواهیم داد.

۱. سیگنالهای پیوسته یا گسسته
۲. سیگنالهای زوج یا فرد یا نه زوج و نه فرد
۳. سیگنالهای متناوب یا غیرمتناوب
۴. سیگنالهای توان یا انرژی و محاسبه توان و انرژی هر سیگنال
۵. سیگنالهای راندوم یا سیگنالها با توابع مشخص زمانی
۶. سیگنالهای حقیقی یا مختلط

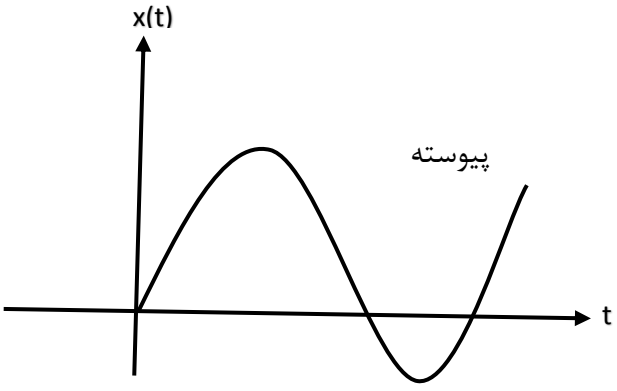
۱. سیگنال‌های پیوسته یا گسسته:

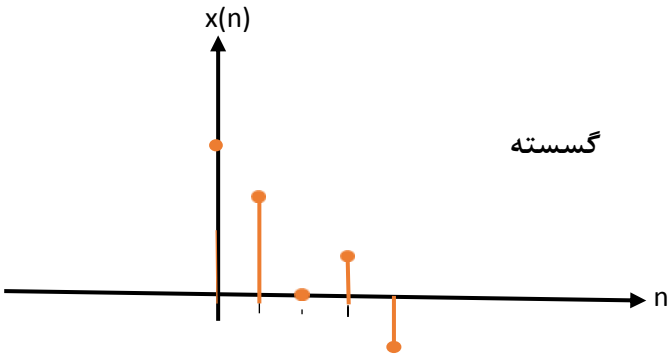
سیگنالهای پیوسته $x(t)$ سیگنالهایی هستند که به ازای همه t ها می‌توان مقداری برای سیگنال در نظر گرفت در حالی که سیگنالهای گسسته $x(n)$ فقط در اعداد صحیح مقدار دارند. این سیگنالها را از دو طریق می‌توان از هم تفکیک کرد و یا تشخیص داد:

الف- از روی معادلات ریاضی :

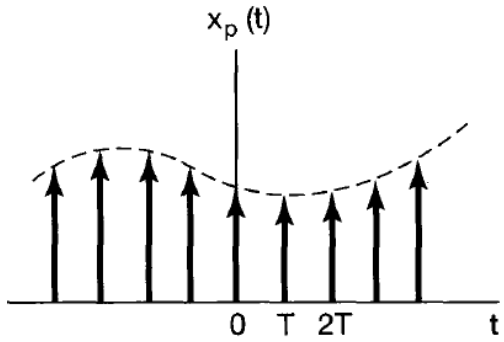
$$x(t) = sin(t) \qquad 0 < t < 2\pi \qquad\qquad x(n) = sin(\pi n) \qquad n = -3, -2, -1, 0, 1$$

ب- از روی ترسیم شکل و نمودار :

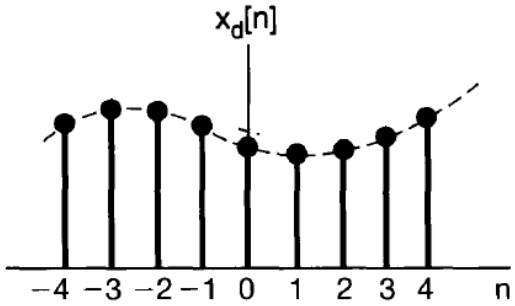




نکته: سیگنال ضربه گسسته سرگرده و سیگنال ضربه پیوسته سر تیز است. در نتیجه نبایستی این اشتباه در ترسیم نمودارهای پیوسته و گسسته رخ دهد.

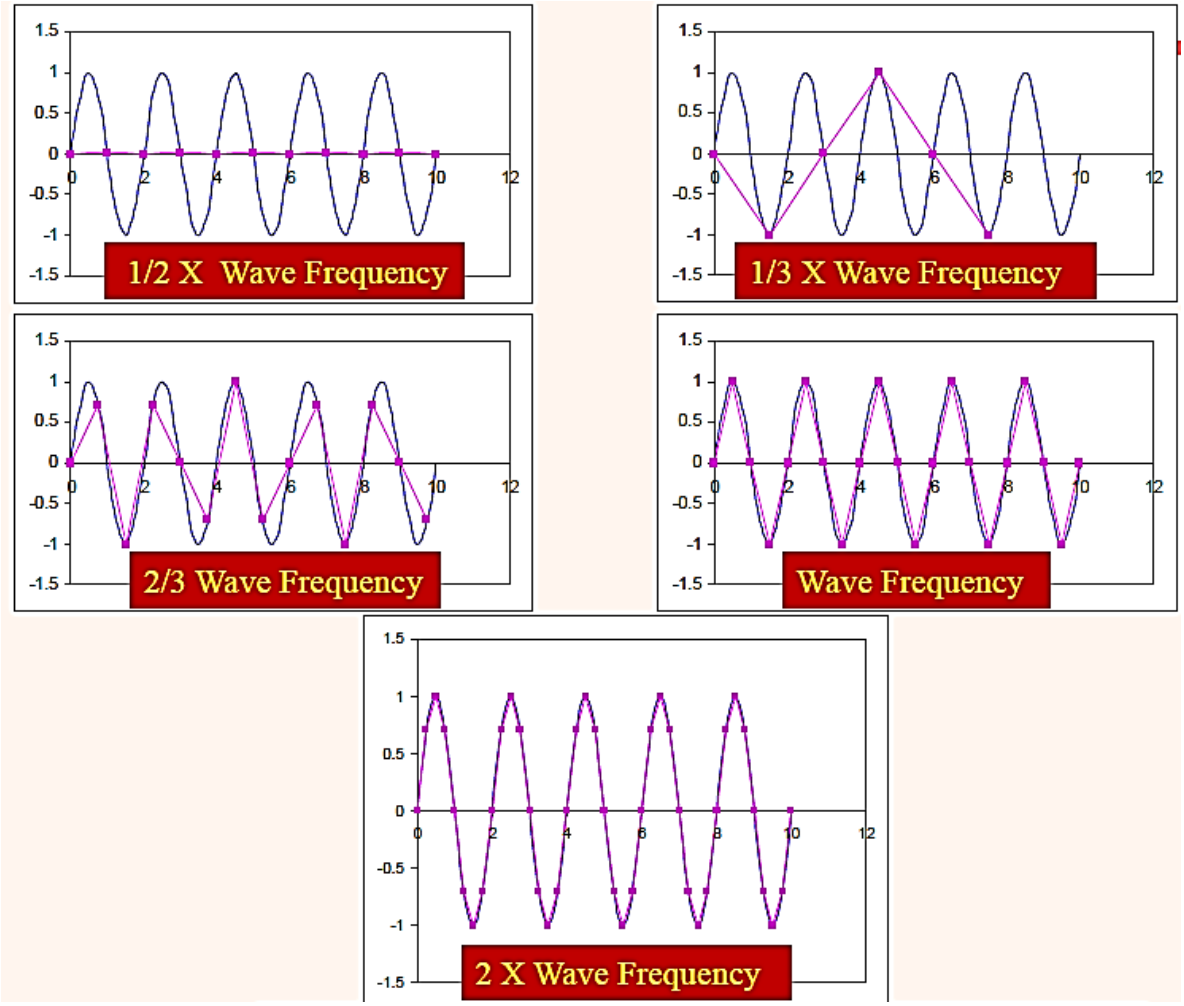


ضربه پیوسته (سر تیز)



ضربه گسسته (سرگرد)

سوال: آیا می‌توان سیگنال پیوسته را به گسسته و بالعکس تبدیل کرد؟



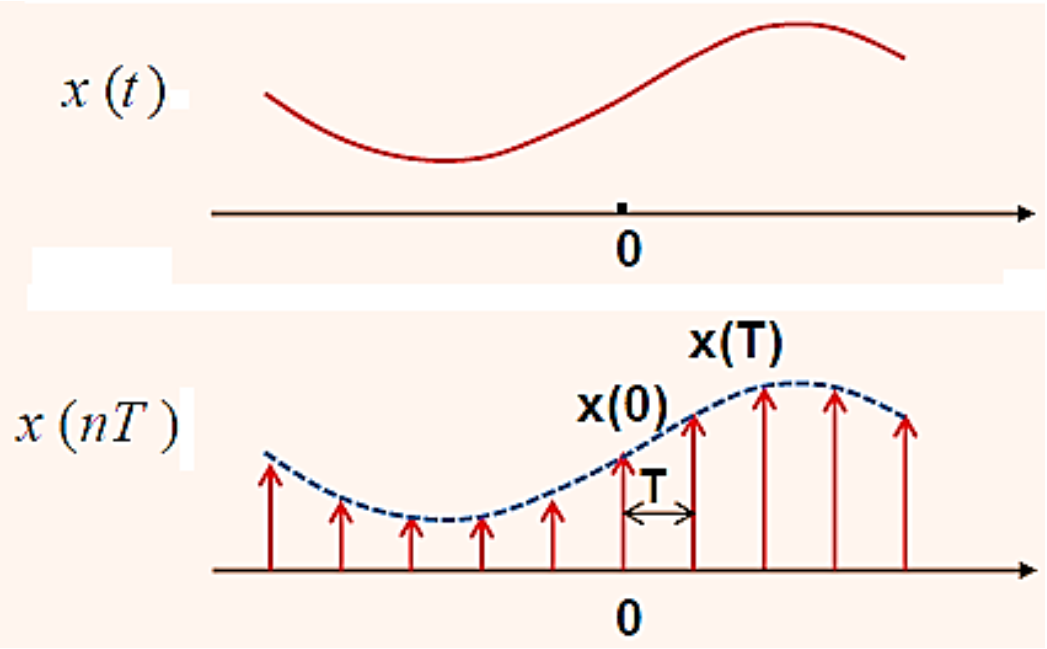
فرض کنید در مبدا زمان می‌ایستیم و قدم هایی به طول T_s برمیداریم و اندازه سیگنال را در هر قدم به صورت سیگنال گسسته رسم می‌کنیم. به این کار در دنیای سیگنال سمپلینگ (Sampling) می گویند. با سمپلینگ فصل‌های بعدی و همچنین ترم‌های آتی بیشتر آشنا خواهیم شد. حال با انتخاب مقادیر مختلف برای T_s قاعدتا نتایج متفاوتی حاصل خواهد شد.

برای یافتن x(n) کافی است بجای t در رابطه x(t) مقدار nT_s قرار داده شود تا در رابطه تئوری نیز به سیگنال گسسته برسیم.

$$x(n) = sin(\pi.n.Ts) = sin(\frac{\pi}{5}n)$$

هر چه زمان سمپلینگ کوچکتر باشد سیگنال گسسته شباهت بیشتری به سیگنال پیوسته خواهد داشت.(توجه داشته باشیم که زمان سمپلینگ را تا یک اندازه میتوانیم کوچک در نظر بگیریم، اگر به این نکته توجه نکنیم ممکن است باعث حذف بعضی اطلاعات بشود).

اما سوال اصلی این است که از کجا تشخیص بدیم T_s که در نظر گرفتیم مناسب است و باعث حذف اطلاعات نمی شود؟ بخشی از پاسخ این سوال را اینجا بررسی می‌کنیم و بخش دیگر را در فصل‌های آینده مورد بررسی قرار خواهیم داد.

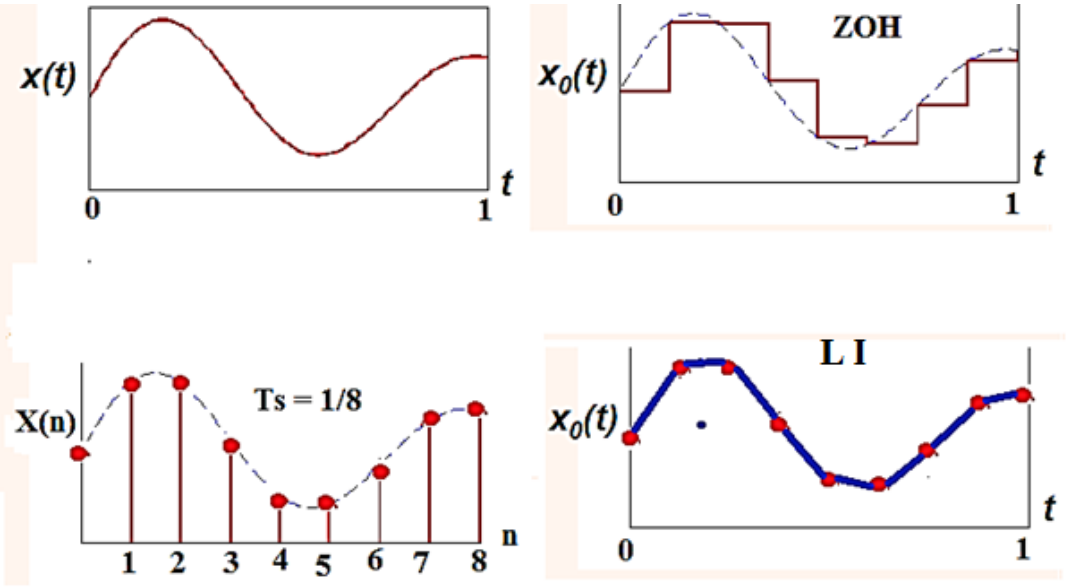


سیگنال گسسته شده را به چند طریق می‌توان به سیگنال پیوسته تبدیل کرد (مدولاسیون) :

۱ـ ZOH (نگهدارنده مرتبه صفر): هر نقطه از سیگنال گسسته را با شیب صفر به نقطه بعدی وصل می کنیم.

۲ـ FOH (نگهدارنده مرتبه یک): هر نقطه از سیگنال گسسته را با یک خط شیب ۱ به نقطه بعدی و صل می کنیم.

۳ـ Linear Interpolation (درونیابی خطی): هر نقطه از سیگنال گسسته را با یک خط شیبدار به نقطه بعدی وصل می کنیم.



پروژه اول متلب :

برنامه‌اي بنويسيد كه از ورودي سيگنال پيوسته (x(t)) و T_s را بگيرد و با استفاده از T_s سيگنال پيوسته را به سيگنال گسسته تبديل كند. سپس با استفاده ازZOH و Linear Interpolation سيگنال گسسته شده را بازسازي كند.

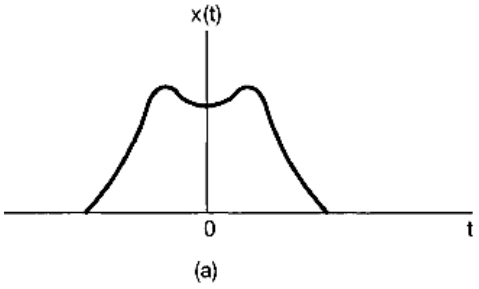
بنابر نكته‌اي كه قبلا بهش ا شاره شد هر T_s را نمي‌توانيم در ورودي وارد كنيم. پس با ا ستفاده از رابطه $E = |\sum e_i^2|^{\frac{1}{2}}$ خطاي باز سازي را محاسبه كنيد و آنرا با يک مقدار خطای مجاز مقايسه كنيد. اگر E از آن مقدار بزرگتر بود برنامه به مرحله دوم باز گردد و T_s ديگري را بگيرد و دوباره فرايند سمپلينگ را انجام دهد.

خروجي برنامه ۴ تا نمودار خواهد بود بطوريكه نمودار اول سيگنال پيوسته ورودي ، نمودار دوم سيگنال گسسته كه با T_s سمپل شده، نمودارهاي سوم و چهارم نمودارهاي باز سازي شده با استفاده از ZOH و Linear Interpolation. توجه داشته باشيد كه اين ۴ تا نمودار بايد در يک صفحه رسم بشوند.

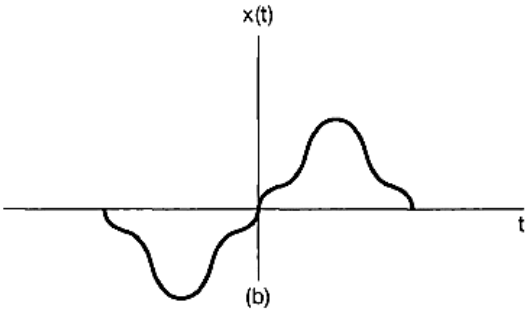
۲. سیگنال زوج یا فرد یا نه زوج و نه فرد :

زوج
- **پیوسته :** $x(t)=x(-t)$ سیگنال $x(t)$ زوج نسبت به محور عمودي متقارن است.
- **گسسته :** $x(n)=x(-n)$ سیگنال $x(n)$ زوج نسبت به محور عمودي متقارن است.

فرد
- **پیوسته :** $x(t)=-x(-t)$ سیگنال $x(t)$ فرد نسبت به مبدا متقارن است.
- **گسسته :** $x(n)=-x(-n)$ سیگنال $x(n)$ فرد نسبت به مبدا متقارن است.



(a) An even continuous-time signal;



(b) an odd continuous-time signal.

سیگنال نه زوج و نه فرد : سیگنال نه زوج و نه فرد را با استفاده از روابط زیر مي‌توانیم بصورت حاصل جمع یک سیگنال زوج و یک سیگنال فرد نمایش دهیم :

پیوسته : $x(t)=x_e(t)+x_o(t) \longrightarrow x_e(t)=\frac{1}{2}(x(t)+x(-t))$ و $x_o(t)=\frac{1}{2}(x(t)-x(-t))$

گسسته : $x(n)=x_e(n)+x_o(n) \longrightarrow x_e(n)=\frac{1}{2}(x(n)+x(-n))$ و $x_o(n)=\frac{1}{2}(x(n)-x(-n))$

x_e و x_o به ترتیب بخش هاي زوج و فرد سیگنال هستند.(e = (even) و o = (odd))

مثال :

$x(n)=(-1)^n$

$x(-n)=(-1)^{-n}=(-1)^n$

سیگنال زوج $x(n)=x(-n)$

$x(t)=t$

$x(-t)=-t$

سیگنال فرد $x(t)=-x(-t)$

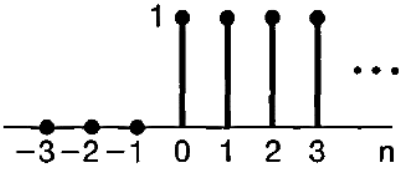
$$xe(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t} + e^{+2t}) = cosh(2t)$$

$x(t)=e^{-2t}$ ➡ نه زوج و نه فرد ➡ $x(t) = x_e(t) + x_o(t)$ ➡

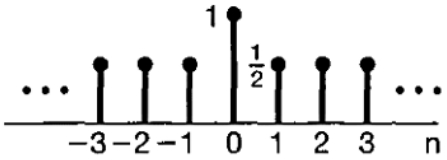
$$xo(t) = \frac{1}{2}(e^{-2t} - e^{+2t}) = -sinh(2t)$$

نکته : x_e و x_o هر سیگنال منحصر بفرد است نمیتوانیم براي یک سیگنال دو تا x_e یا x_o پیدا کنیم.

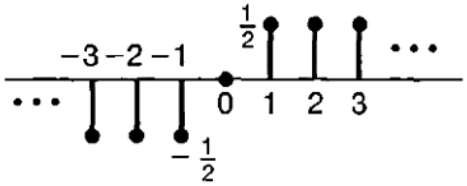
$$x[n] = \begin{cases} 1, n \geq 0 \\ 0, n < 0 \end{cases}$$



$$\mathcal{E}v\{x[n]\} = \begin{cases} \frac{1}{2}, n < 0 \\ 1, n = 0 \\ \frac{1}{2}, n > 0 \end{cases}$$



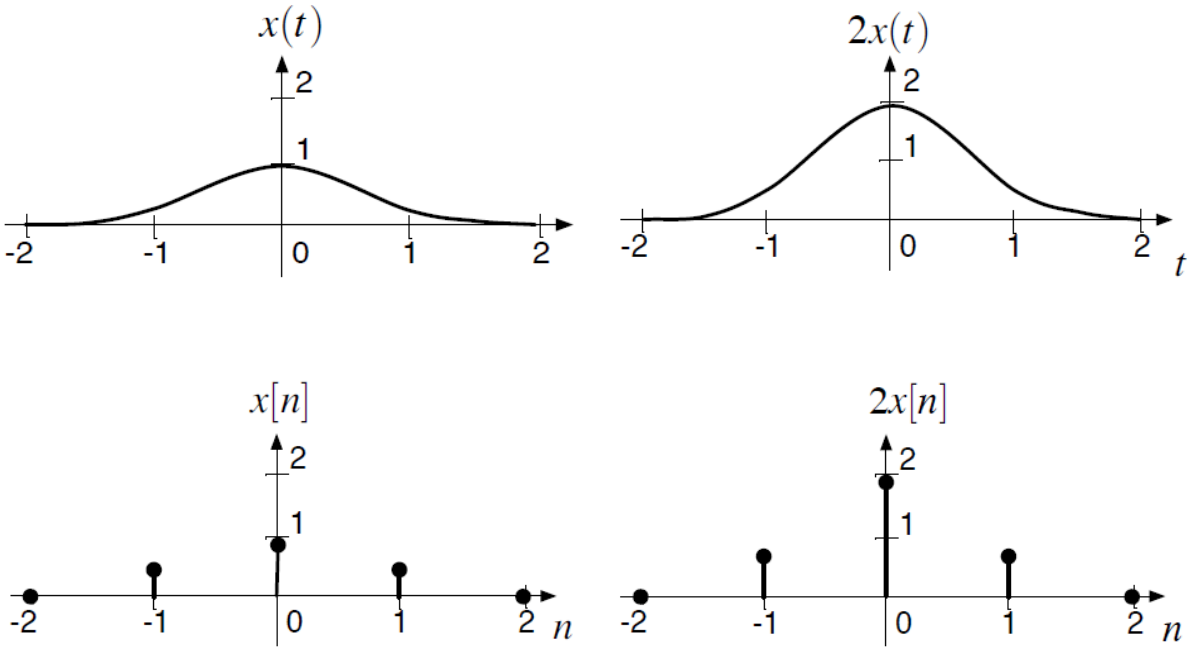
$$\mathcal{O}d\{x[n]\} = \begin{cases} -\frac{1}{2}, n < 0 \\ 0, n = 0 \\ \frac{1}{2}, n > 0 \end{cases}$$



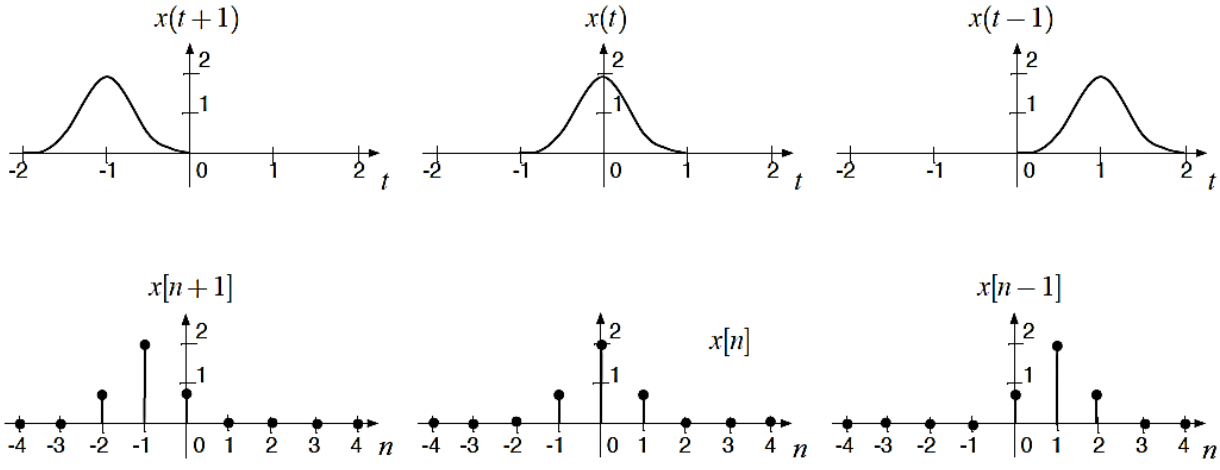
انبساط یا فشردگی زمانی (scaling) و شیفت سیگنالها در حوزه زمان:

روي متغیر مستقل سیگنال و همچنین خود سیگنال میتوانیم یک سري تغییرات اعمال کنیم. فرض کنید سیگنال $x(t)$ یا $x(n)$ را داشته باشیم چگونه میتوانیم سیگنالهای پیوسته $Ax(at - t_0)$, $x(at)$, $x(t - t_0)$, $Ax(t)$ یا سیگنالهای گسسته $Ax(an - n_0)$, $x(an)$, $x(n - n_0)$, $Ax(n)$ را ترسیم کنیم. ابتدا سیگنالهای پیوسته را بیان میکنیم سپس به بیان روش برای سیگنالهای گسسته خواهیم پرداخت.

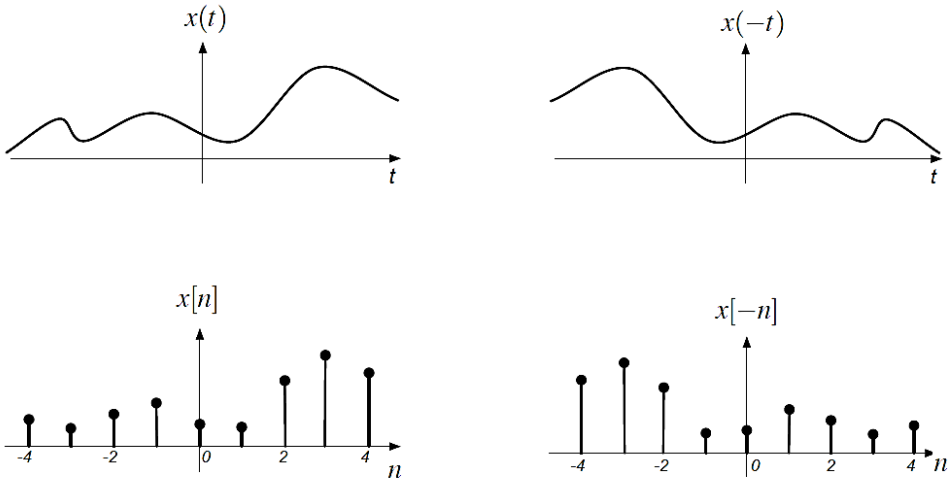
اگر سیگنال $x(t)$ را داشته باشیم، برای ترسیم سیگنال $Ax(t)$ فقط دامنه سیگنال $x(t)$ را A برابر می‌کنیم. این قانون در رابطه با سیگنالهای گسسته نیز صدق میکند.



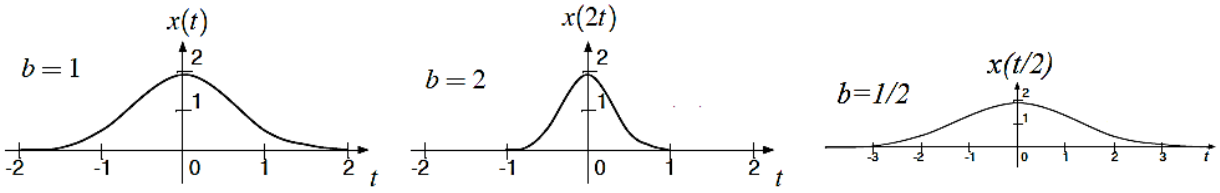
سیگنال $x(t-t_0)$ همان سیگنال $x(t)$ است که فقط به اندازه t_0 به راست شیفت یافته است و سیگنال $x(t+t_0)$ همان سیگنال $x(t)$ است که فقط به اندازه t_0 به چپ شیفت یافته است. همین قانون در رابطه با سیگنالهای گسسته نیز صادق است.



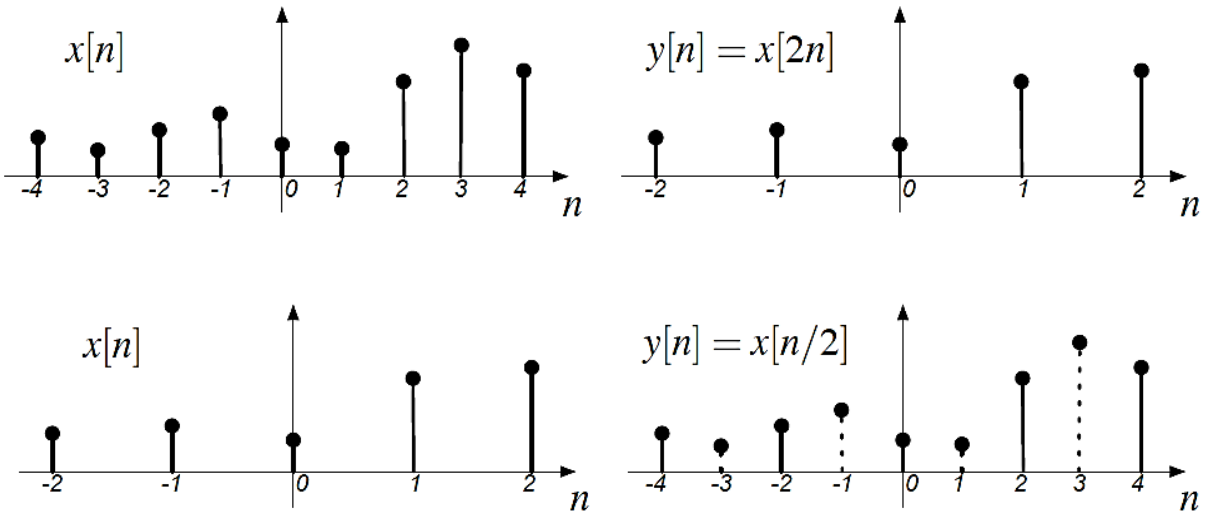
اگر سیگنال $x(t)$ را داشته باشیم، برای ترسیم سیگنال $x(-t)$ فقط سیگنال را نسبت به محور y ها قرینه میکنیم. این قانون در رابطه با سیگنالهای گسسته نیز صدق میکند.



برای scaling و ترسیم $x(at)$ هم به روال زیر عمل میکنیم. اگر $0 < a < 1$ باشد انبساط زمانی و اگر $a > 1$ باشد فشردگی زمانی خواهیم داشت.



برای scaling و ترسیم $x(an)$ هم به روال زیر عمل می‌کنیم. اگر $0 < a < 1$ باشد انبساط زمانی و اگر $a > 1$ باشد فشردگی زمانی خواهیم داشت ولی نکته مهم اینکه فقط n های صحیح را حفظ کرده و باقی n های غیرصحیح را حذف نمایید.



درحالت کلی براي ايجاد تغييرات بايد مرحله به مرحله جلو برويم. اگر اين كار را نكنيم ممكن است به جواب اشتباه برسيم :

ابتدا shift را بر روي سيگنال اعمال مي‌كنيم سپس scaling و در آخر دامنه را .

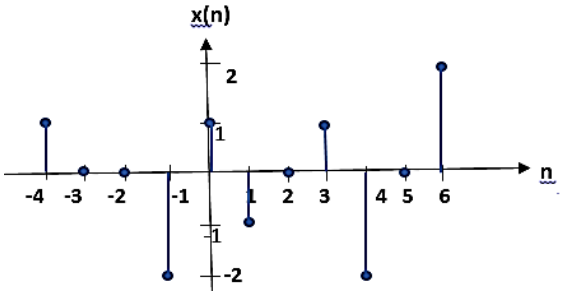
Ax(at+b)
- 1- x(t+b) Shift
- 2- x(at+b) Scaling
- 3- Ax(at+b) Amplitude

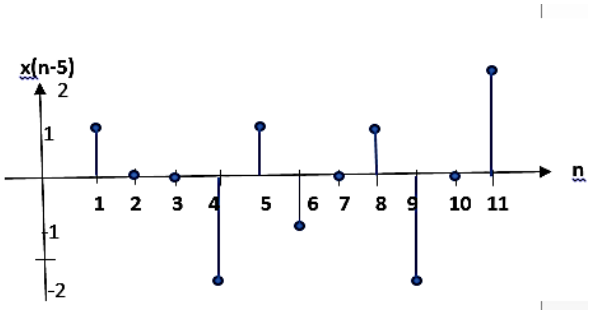
ترتيب عمليات بالا به اين صورت است كه اول Shift و بعد Scaling و در آخر Amplitude را اعمال می‌كنيم.

ترتيب بالا براي سيگنال گسسته نيز برقرار است. فقط در بخش مربوط به scaling بايستی توجه داشته باشيم كه فقط n های صحيح باقی می‌مانند و باقی n های غير صحيح حذف می‌گردد. به مثال زير توجه كنيد :

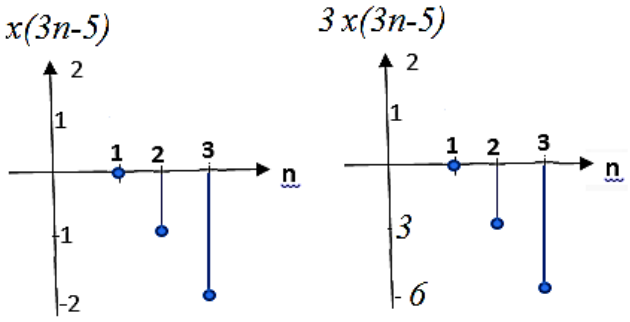
مثال : نمودار x(n) داده شده است نمودار 3x(3n-5) را رسم كنيد.

ابتدا ۵ تا به سمت راست شيفت ميدهيم ،

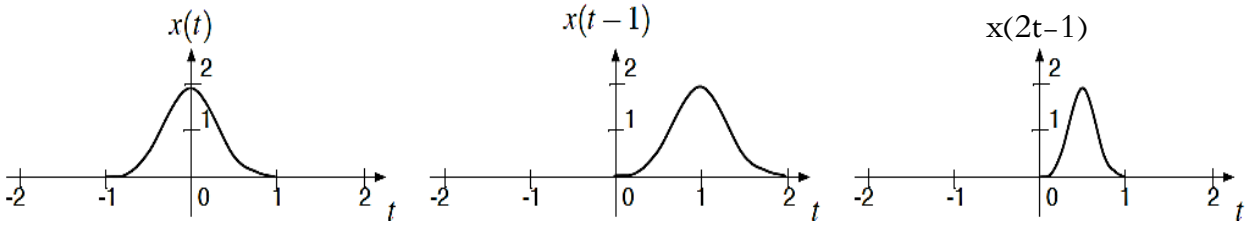




مرحله بعد scaling است. همينطور كه اول جلسه گفته شد سيگنال هاي گسسته فقط اعداد صحيح را شامل ميشود پس در scaling سيگنال هايي گسسته بايد اون داده هايي رسم شوند كه بعد از اعمال scaling مقدار صحيح دارند. (در scaling سيگنال هاي گسسته بعضي از داده ها ممكن است حذف شود).



مثال : باتوجه به نمودار x(t) نمودار x(2t-1) را رسم کنید. با توجه به مراحلي که قبلا بهش اشاره شد این مثال را حل میکنیم. يعني اول shift بعد scaling و در آخر دامنه را اعمال میکنیم. (مي‌دانیم که اعداد داخل پرانتز رو متغیر مستقل t اثر میگذارند.)



یادداشت:

.....

.....

.....

.....

.....

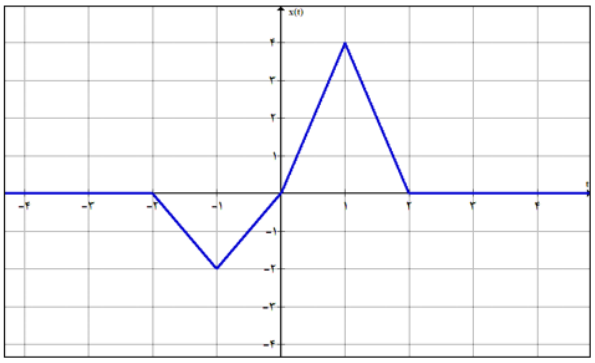
.....

.....

.....

Lecture 01

سوال: نمودار سیگنال $x(t)$ در شکل زیر داده شده است مطلوبست:

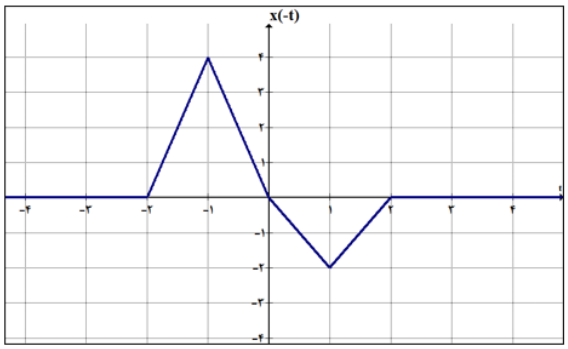


الف) قسمت زوج و قسمت فرد سیگنال را رسم کنید.

ب)نمودار سیگنال $x(\frac{-5}{2}t+1)$ را رسم کنید.

ج)نمودار سیگنال $x(n^2)$ را رسم کنید.

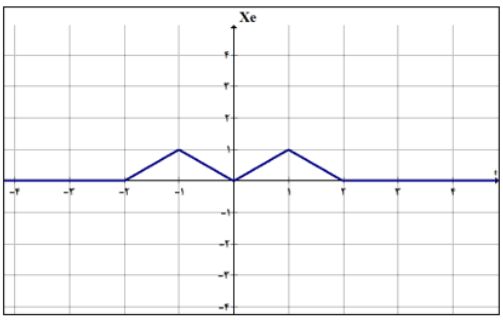
حل: الف) با توجه به نمودار سیگنال $x(t)$ خواهیم داشت :

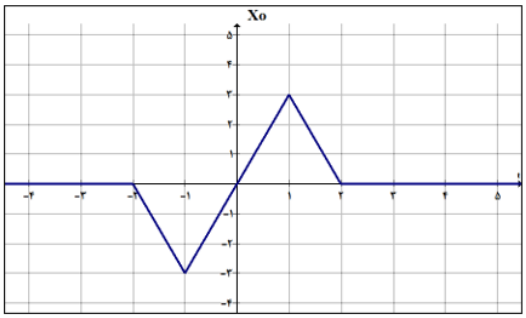


$$x_o = \frac{x(t) - x(-t)}{2}$$

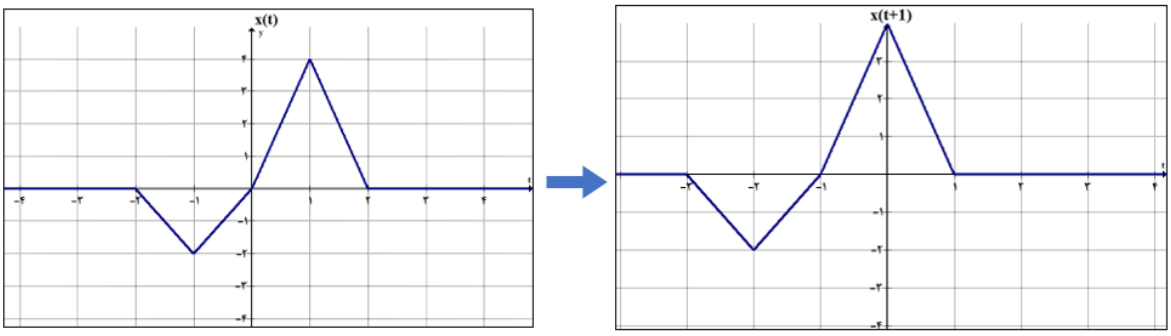
$$x_e = \frac{x(t) + x(-t)}{2}$$

پس نمودار قسمت زوج و قسمت فرد به صورت زیر خواهد بود .

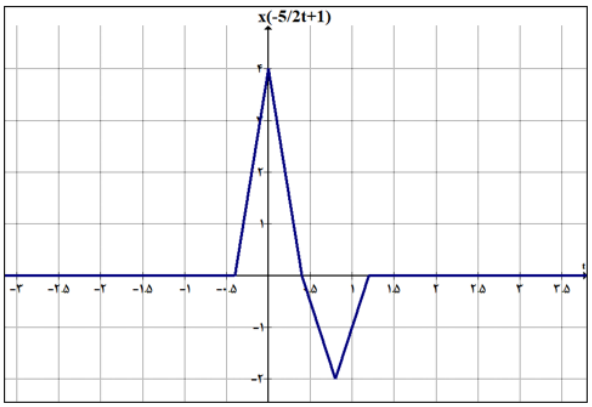




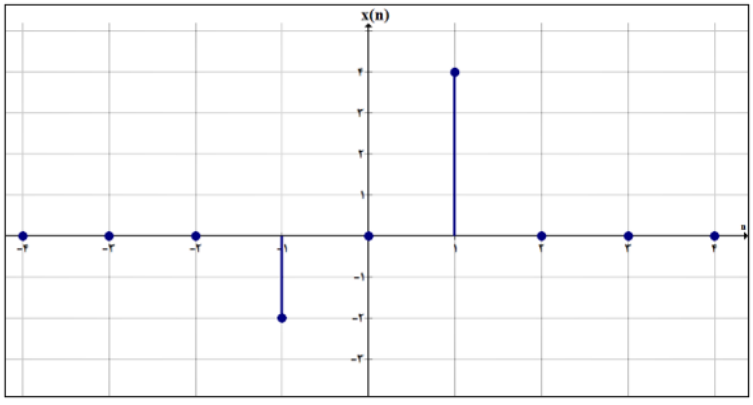
ب) برای رسم نمودار $x(-5/2t+1)$ ابتدا نمودار را ۱ واحد به سمت چپ شیف میدهیم ، یعنی:



حال طول ها را (محور t) را $\frac{-2}{5}$ برابر میکنیم (منفی به معنای قرینه کردن نسبت به محور y میباشد.)



پ) برای رسم نمودار سیگنال گسسته $x(n^2)$ ابتدا نمودار اصلی را با سمپلینگ تایم ۱ نموبرداری میکنیم تا به نمودار $x(n)$ برسیم:



پس با توجه به نمودار بالا $x(n^2)$ فقط در نقطه $n=1$ مقدار ۴ دارد در غیر این صورت مقدارش صفر است.(چرا؟)